



# Informatik IV - Tutorium XVI & XVII

## Tut Nr. 1 – lineare und quadratische Optimierung

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Informatik  
IBDS Prautzsch

8. Mai 2009



Universität Karlsruhe (TH)  
Forschungsuniversität • gegründet 1825



# Inhaltsverzeichnis

## 1 Auftakt

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele

# Inhaltsverzeichnis

① Auftakt

② Lernziele

③ Themen

Simplex-Verfahren geometrisch

Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Übungsblatt 2

# Inhaltsverzeichnis

## 1 Auftakt

## 2 Lernziele

## 3 Themen

Simplex-Verfahren geometrisch

Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Übungsblatt 2

## 4 Abspann



# Organisatorisches

Email: [muenchdavid@gmail.com](mailto:muenchdavid@gmail.com)

<https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/>

Tutorium 16: Freitags 8:00 Uhr - Raum -107

Tutorium 17: Freitags 9:45 Uhr - Raum -119



## Schein / Übungsblätter

Bearbeitete Hausaufgaben können abgegeben werden.  
Es gibt vier Scheinklausuren mit je 50 Punkten an folgenden Terminen:

- 19.05.2009
- 09.06.2009
- 02.07.2009
- 23.07.2009

120 Punkte aus den Scheinklausuren sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.



## Schein / Übungsblätter

Bearbeitete Hausaufgaben können abgegeben werden.  
Es gibt vier Scheinklausuren mit je 50 Punkten an folgenden Terminen:

- 19.05.2009
- 09.06.2009
- 02.07.2009
- 23.07.2009

120 Punkte aus den Scheinklausuren sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Ab 140 Punkten gibt es einen Notenbonus von ca. 1/3 Note.



## Schein / Übungsblätter

Bearbeitete Hausaufgaben können abgegeben werden.

Es gibt vier Scheinklausuren mit je 50 Punkten an folgenden

Terminen:

- 19.05.2009
- 09.06.2009
- 02.07.2009
- 23.07.2009

120 Punkte aus den Scheinklausuren sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Ab 140 Punkten gibt es einen Notenbonus von ca. 1/3 Note.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

## Schein / Übungsblätter

Bearbeitete Hausaufgaben können abgegeben werden.  
Es gibt vier Scheinklausuren mit je 50 Punkten an folgenden Terminen:

- 19.05.2009
- 09.06.2009
- 02.07.2009
- 23.07.2009

120 Punkte aus den Scheinklausuren sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Ab 140 Punkten gibt es einen Notenbonus von ca. 1/3 Note.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

Bitte folgendes Deckblatt verwenden:

<http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~unbdh/deckblatt/>



## Literatur

Boehm, Prautzsch: Numerical Methods. AK Peters 1993. ISBN 3-528-06350-5

[http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA\\_OPAC&fbt=7319953&nd=3204657](http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=7319953&nd=3204657)

Ash: Information Theory. Dover 1990. ISBN 0-486-66521-6

[http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA\\_OPAC&nd=9866904](http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&nd=9866904)

Goos: Vorlesungen über Informatik. Bd. 4, Springer 1998. ISBN 3-540-60650-5

[http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA\\_OPAC&fbt=9316367&nd=6568301](http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=9316367&nd=6568301)



# Was wollen wir heute erreichen?



# Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen



## Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen
- und die Tableaumethode dazu verstehen



## Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen
- und die Tableaumethode dazu verstehen
- Gradientenverfahren anwenden können



## Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen
- und die Tableaumethode dazu verstehen
- Gradientenverfahren anwenden können
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus anwenden können



# Optimierung linearer Funktionen



# Simplex-Verfahren

Das Simplex-Verfahren ist ein Optimierungsverfahren der Numerik zur Lösung **linearer Optimierungsprobleme**. Es löst ein solches Problem nach endlich vielen Schritten exakt oder stellt dessen Unlösbarkeit oder Unbeschränktheit fest. Die Grundidee des Simplex-Verfahrens wurde 1947 von George Dantzig vorgestellt. Seitdem hat es sich durch zahlreiche Verbesserungen zum wichtigsten Lösungsverfahren der linearen Optimierung in der Praxis entwickelt.



---

**Algorithm 1** SIMPLEXGEOM

---

**Eingabe:** Lineares Programm  $(A, c, b)$  in Standardform

**Ausgabe:** Optimale Lösung  $x$  des LPs

$P \leftarrow$  konvexes Lösungspolyeder zu  $(A, c, b)$

$x \leftarrow$  beliebige Ecke in  $P$

**solange** *es gibt verbessernde Kante*  $(x, y) \in P$  **tue**  
     $x \leftarrow y$

**Ende**

return  $x$

---



---

**Algorithm 2** SIMPLEXGEOM

---

**Eingabe:** Lineares Programm  $(A, c, b)$  in Standardform

**Ausgabe:** Optimale Lösung  $x$  des LPs

$P \leftarrow$  konvexes Lösungspolyeder zu  $(A, c, b)$

$x \leftarrow$  beliebige Ecke in  $P$

**solange** es gibt verbessernde Kante  $(x, y) \in P$  **tue**  
     $x \leftarrow y$

**Ende**

return  $x$

---

$\rightsquigarrow$  Wir bewegen uns über die Kanten des Polyeders von Ecke zu Ecke, bis wir eine optimale Ecke  $x$  gefunden haben.



Rohöl soll durch ein chemisches Verfahren in Komponenten zerlegt werden:

- schweres Öl  $S$
- mittelschweres Öl  $M$
- leichtes Öl  $L$



Rohöl soll durch ein chemisches Verfahren in Komponenten zerlegt werden:

- schweres Öl  $S$
- mittelschweres Öl  $M$
- leichtes Öl  $L$

Folgende Verfahren stehen zur Verfügung:

10 Einheiten Rohöl ergeben:

- 2 Einheiten  $S$
- 2 Einheiten  $M$
- 1 Einheit  $L$

Kosten: 3

10 Einheiten Rohöl ergeben:

- 1 Einheit  $S$
- 2 Einheiten  $M$
- 4 Einheiten  $L$

Kosten: 5



## Aufgabe

Ein Kunde möchte nun

- 3 Einheiten  $S$
- 5 Einheiten  $M$
- 4 Einheiten  $L$

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm



## Aufgabe

Ein Kunde möchte nun

- 3 Einheiten  $S$
- 5 Einheiten  $M$
- 4 Einheiten  $L$

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

- Formulieren Sie das Problem als lineares Programm
- Bringen Sie das lineare Programm in Standardform



## Aufgabe

Ein Kunde möchte nun

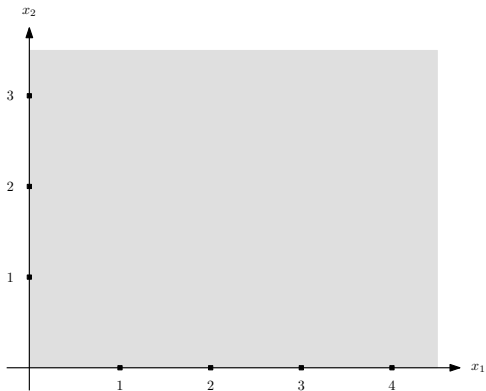
- 3 Einheiten  $S$
- 5 Einheiten  $M$
- 4 Einheiten  $L$

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

- Formulieren Sie das Problem als lineares Programm
- Bringen Sie das lineare Programm in Standardform
- Lösen Sie das LP mit Hilfe des geometrischen Simplexverfahrens

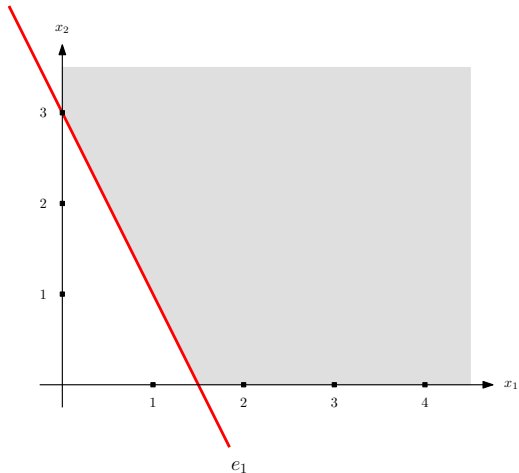


# Simplex-Verfahren



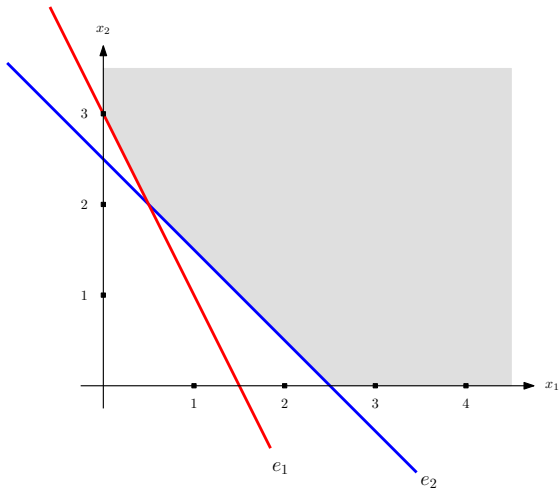


# Simplex-Verfahren





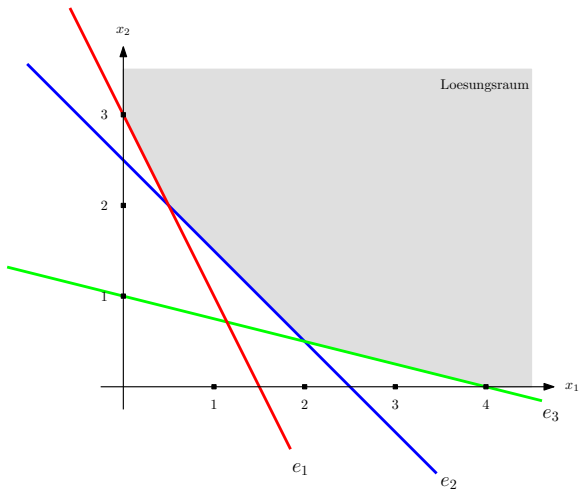
# Simplex-Verfahren





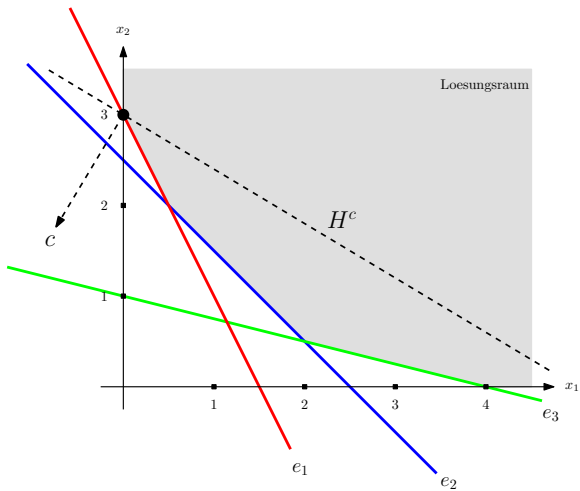
## Simplex-Verfahren geometrisch

# Simplex-Verfahren



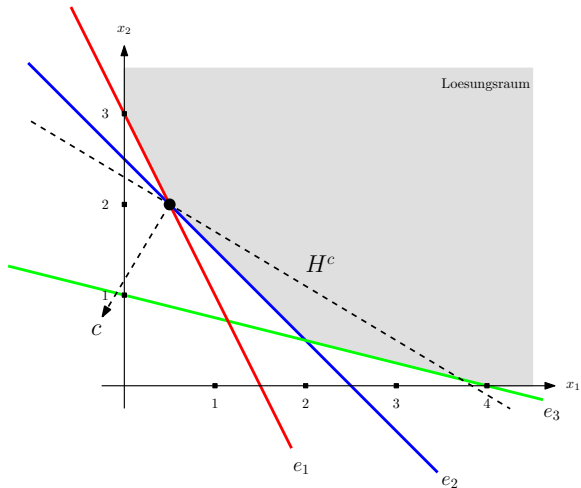


# Simplex-Verfahren





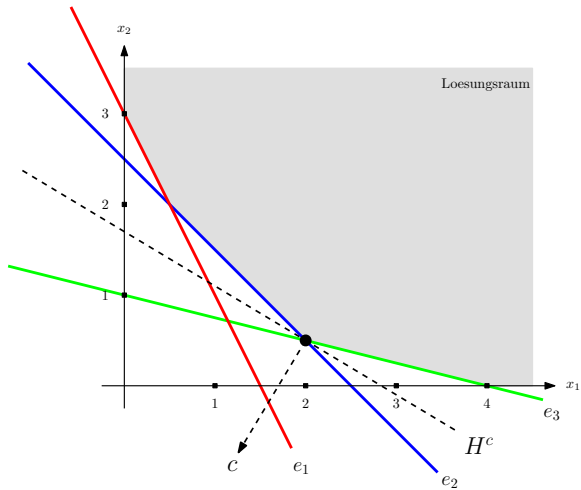
# Simplex-Verfahren





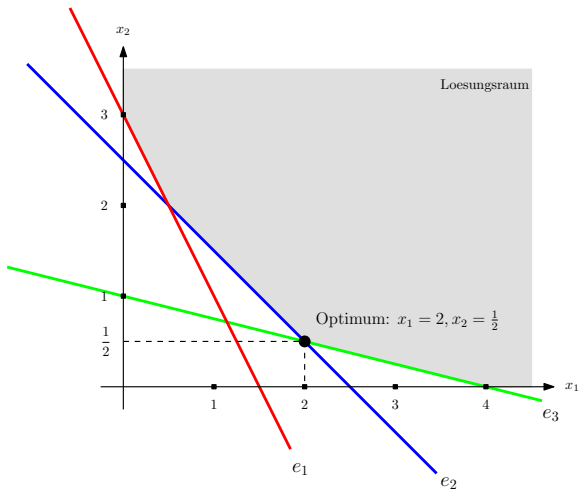
## Simplex-Verfahren geometrisch

# Simplex-Verfahren





# Simplex-Verfahren





## Hausaufgabe 1

Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & = & \max \\ x_2 & - & x_1 & \leq & 2 \\ x_2 & & & \leq & 3 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

Lösen Sie das lineare Programm

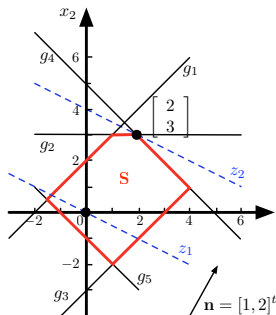
- 1 graphisch,
- 2 indem Sie zunächst  $x_1$  und  $x_2$  eliminieren und anschließend das Simplexverfahren anwenden.

*Hinweis:*  $\bar{x} = [0, 0]^t$  ist zulässiger Punkt.



# Hausaufgabe 1

a) Wie in der Abbildung zu sehen ist, wächst die Konstante  $c$  bei der Geraden  $\{x_1 + 2x_2 = c\}$  in Richtung  $\vec{n}$ .



$$\begin{aligned}
 g_1 &: x_2 - x_1 = 2 \\
 g_2 &: x_2 = 3 \\
 g_3 &: x_1 - x_2 = 3 \\
 g_4 &: x_1 + x_2 = 5 \\
 g_5 &: x_1 + x_2 = -1 \\
 z_1 &: x_1 + 2x_2 = 0 \\
 z_2 &: x_1 + 2x_2 = 8
 \end{aligned}$$

Daher ergibt sich der optimale Wert 8 mit der Lösung  $[x_1, x_2]^t = [2, 3]^t$ .



b) Das lineare Programm kann kurz geschrieben werden durch

$$\begin{array}{l}
 \text{(LP1)} \\
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 z
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 x_1 & x_2 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 2 \\
 0 & -1 & 3 \\
 -1 & 1 & 3 \\
 -1 & -1 & 5 \\
 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 2 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \geq \mathbf{0} \\
 \\
 \\
 = \max
 \end{array}$$



b) Das lineare Programm kann kurz geschrieben werden durch

$$\begin{array}{l}
 \text{(LP1)} \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & x_1 & x_2 & 1 \\
 y_1 & 1 & -1 & 2 \\
 y_2 & 0 & -1 & 3 \\
 y_3 & -1 & 1 & 3 \\
 y_4 & -1 & -1 & 5 \\
 y_5 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 z & 1 & 2 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \geq 0 \\
 \\
 \\
 = \max
 \end{array}$$

### 1. Schritt: Überführung in Normalform:

1) Da der Ursprung  $[0, 0]^t$  bereits ein zulässiger Punkt ist, müssen wir die Koordinatentransformation  $\vec{x} = \vec{x}' + [0, 0]^t$  nicht durchführen.



## Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

2) Wir tauschen  $x_s, s = 1, 2$ , gegen geeignete  $y_r$  und erhalten (LP2) und (LP3), wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

(LP1)

	$x_1$	$x_2$	1	$a_i/a_{i,s}$	$a_j/a_{j,s}$
$y_1$	1	-1	2	2	
$y_2$	0	-1	3		
$y_3$	-1	1	3		
$y_4$	-1	-1	5		
$y_5$	1	1	1		
$z$	1	2	0		

▲  
 $s = 1$

-3  
-5  
-1

$x_1 \leftrightarrow y_3$   
○ Pivot

(LP2)

	$y_3 \geq 0$	$x_2$	1	$a_i/a_{i,s}$	$a_j/a_{j,s}$
$y_1$	-1	0	5		-3
$y_2$	0	-1	3		
$x_1$	-1	1	3		
$y_4$	1	-2	2		
$y_5$	-1	2	4		
$z$	-1	3	3		

▲  
 $s = 2$

-1  
-2

$x_2 \leftrightarrow y_4$   
○ Pivot

(LP3)

	$y_3 \geq 0$	$y_4 \geq 0$	1
$y_1$	-1	0	5
$y_2$	-1/2	1/2	2
$x_1$	-1/2	-1/2	4
$x_2$	1/2	-1/2	1
$y_5$	0	-1	6
$z$	1/2	-3/2	6

(LP4)

	$y_3 \geq 0$	$y_4 \geq 0$	1
$y_1$	-1	0	5
$y_2$	-1/2	1/2	2
$y_5$	0	-1	6
$z$	1/2	-3/2	6

$x_1 = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 4$   
 $x_2 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 1$



## Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

2) Wir tauschen  $x_s, s = 1, 2$ , gegen geeignete  $y_r$  und erhalten (LP2) und (LP3), wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

(LP1)

	$x_1$	$x_2$	1	$a_i/a_{i,s}$	$a_j/a_{j,s}$
$y_1$	1	-1	2		2
$y_2$	0	-1	3		
$y_3$	-1	1	3		-3
$y_4$	-1	-1	5		-5
$y_5$	1	1	1		1
$z$	1	2	0		

▲  
 $s = 1$

$x_1 \leftrightarrow y_3$   
○ Pivot

(LP2)

	$y_3 \geq 0$	$x_2$	1	$a_i/a_{i,s}$	$a_j/a_{j,s}$
$y_1$	-1	0	5		-3
$y_2$	0	-1	3		
$x_1$	-1	1	3		1
$y_4$	1	-2	2		2
$y_5$	-1	2	4		2
$z$	-1	3	3		

▲  
 $s = 2$

$x_2 \leftrightarrow y_4$   
○ Pivot

(LP3)

	$y_3 \geq 0$	$y_4 \geq 0$	1
$y_1$	-1	0	5
$y_2$	-1/2	1/2	2
$x_1$	-1/2	-1/2	4
$x_2$	1/2	-1/2	1
$y_5$	0	-1	6
$z$	1/2	-3/2	6

(LP4)

	$y_3 \geq 0$	$y_4 \geq 0$	1
$y_1$	-1	0	5
$y_2$	-1/2	1/2	2
$y_5$	0	-1	6
$z$	1/2	-3/2	6

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 4$$

$$x_2 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 1$$

3) Nach Elimination von  $x_1$  und  $x_2$  bekommen wir die Normalform (LP4).



**2. Schritt: Simplexverfahren:** Für jedes  $c_s > 0$  suchen wir ein Pivotelement in der Spalte  $s$  und führen einen Eckentausch durch. Nach einem Eckentausch bekommen wir (LP5).

(LP4)	$y_3 \geq 0$	$y_4 \geq 0$	1	$a_j/a_{j,s}$
$y_1$	-1	0	5	-5
$y_2$	-1/2	1/2	2	-4
$y_5$	0	-1	6	
$z$	1/2	-3/2	6	

▲  
s

(LP5)	$y_2 \geq 0$	$y_4 \geq 0$	1
$y_1$	2	-1	1
$y_3$	-2	1	4
$y_5$	0	-1	6
$z$	-1	-1	8

$y_3 \leftrightarrow y_2$   
○ Pivot

Da alle  $c_s$  negativ sind, bekommen wir eine Lösung bei der Ecke mit  $y_2 = 0$  und  $y_4 = 0$ . Die Lösung ist also

$$y_2 = y_4 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_3 = 4, \quad y_5 = 6$$

und

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 4 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 1 = 3.$$

Der maximale Wert beträgt 8.



## Hausaufgabe 2

Bestimmen Sie die Gerade

$$y(x) = a + bx,$$

für die

$$\max\{|y(0) - 2|, |y(1) - 1|, |y(2) - 4|\}$$

minimal ist.



## Hausaufgabe 2

Sei

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} y(0) - 2 \\ y(1) - 1 \\ y(2) - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2 \\ a + b - 1 \\ a + 2b - 4 \end{bmatrix}.$$

Zur Bestimmung sind  $a$  und  $b$ , so dass

$$\|\vec{r}\|_{\infty} = \max\{|a - 2|, |a + b - 1|, |a + 2b - 4|\} = \min.$$



## Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Sei  $r = \|\vec{r}\|_\infty$  und seien  $x_0 = 1/r$ ,  $x_1 = a/r$ ,  $x_2 = b/r$ . Aus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \pm \frac{1}{r} \vec{r} = \pm \frac{1}{r} \begin{bmatrix} a - 2 \\ a + b - 1 \\ a + 2b - 4 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 - 2x_0 \\ x_1 + x_2 - x_0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_0 \end{bmatrix}$$

erhalten wir ein lineares Programm



## Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Sei  $r = \|\vec{r}\|_\infty$  und seien  $x_0 = 1/r, x_1 = a/r, x_2 = b/r$ . Aus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \pm \frac{1}{r} \vec{r} = \pm \frac{1}{r} \begin{bmatrix} a-2 \\ a+b-1 \\ a+2b-4 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 - 2x_0 \\ x_1 + x_2 - x_0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_0 \end{bmatrix}$$

erhalten wir ein lineares Programm

$$\begin{aligned} x_0 &= \max \\ x_1 - 2x_0 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_0 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_0 &\leq 1 \\ -(x_1 - 2x_0) &\leq 1 \\ -(x_1 + x_2 - x_0) &\leq 1 \\ -(x_1 + 2x_2 - 4x_0) &\leq 1 \end{aligned}$$



## Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

(LP1)

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	1	$\frac{a_i}{a_{i,s}}$	$\frac{a_j}{a_{j,s}}$
$y_1$	2	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	
$y_2$	1	-1	-1	1	1	
$y_3$	4	-1	-2	1	$\frac{1}{4}$	
$y_4$	-2	1	0	1		$-\frac{1}{2}$
$y_5$	-1	1	1	1		-1
$y_6$	-4	1	2	1	$\frac{1}{4}$	
$z$	1	0	0	0		

▲  
 $s = 1$

○ Pivot  
 $x_0 \leftrightarrow y_6$

(LP2)

	$y_6$	$x_1$	$x_2$	1	$\frac{a_i}{a_{i,s}}$	$\frac{a_j}{a_{j,s}}$
$y_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$		-3
$y_2$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$		$-\frac{5}{3}$
$y_3$	-1	0	0	2		
$y_4$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$
$y_5$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		1
$x_0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		1
$z$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		

▲  
 $s = 2$

○ Pivot  
 $x_1 \leftrightarrow y_2$

(LP3)

	$y_6$	$y_2$	$x_2$	1	$\frac{a_i}{a_{i,s}}$	$\frac{a_j}{a_{j,s}}$
$y_1$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	
$x_1$	$-\frac{1}{3}$	-3	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$		-1
$y_3$	-1	0	0	2		
$y_4$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$		
$y_5$	0	-1	0	2		
$x_0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
$z$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		

▲  
 $s = 3$

○ Pivot  
 $x_2 \leftrightarrow y_4$

(LP4)

	$y_6$	$y_2$	$y_4$	1
$y_1$	0	0	-1	2
$x_1$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1
$y_3$	-1	0	0	2
$x_2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1
$y_5$	0	-1	0	2
$x_0$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1
$z$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1

(LP5)

	$y_6$	$y_2$	$y_4$	1
$y_1$	0	0	-1	2
$y_3$	-1	0	0	2
$y_5$	0	-1	0	2
$z$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1

$x_1 = -\frac{1}{2}y_6 - y_2 + \frac{1}{2}y_4 + 1$   
 $x_2 = \frac{1}{4}y_6 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{4}y_4 + 1$   
 $x_0 = -\frac{1}{4}y_6 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{4}y_4 + 1$



## Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Wir führen (LP1) in Normalform über und erhalten (LP5), wobei der Ursprung  $[x_0, x_1, x_2]^t = [0, 0, 0]^t$  schon ein zulässiger Punkt ist.

Da in (LP5)  $\vec{c} = [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]^t < \vec{0}$  gilt, bekommen wir den maximalen Wert 1 mit Lösung

$$y_6 = y_2 = y_4 = 0$$

und

$$y_1 = 2, y_3 = 2, y_5 = 2, x_1 = 1, x_2 = 1, x_0 = 1$$

und

$$r = \frac{1}{x_0} = 1, a = r x_1 = 1, b = r x_2 = 1.$$

Die gesuchte Gerade ist

$$y(x) = 1 + x$$

und  $\|\vec{r}\|_\infty = 1$ .



# Lektüreempfehlung

Unbedingt lesen! Wichtig für die Klausur. Hier wird quasi das Thema Simplex-Verfahren komplett abgehandelt:

<http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uxasq/info4tut7/mat/simplex.pdf>



# Gradientenverfahren

## Optimierung quadratischer Funktionen

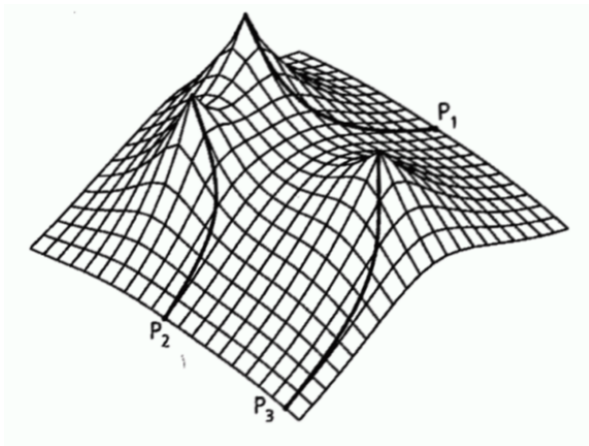
### Levenberg-Marquardt-Algorithmus



# Gradientenverfahren

Das Verfahren des steilsten Abstiegs, auch Gradientenverfahren genannt, ist ein Verfahren, das in der Numerik eingesetzt wird, um **allgemeine Optimierungsprobleme** zu lösen. Dabei geht man (am Beispiel eines Minimierungsproblem) von einem Näherungswert aus. Von diesem schreitet man in Richtung des Gradienten (der die Richtung des steilsten Abstiegs von diesem Näherungswert angibt) fort, bis man keine numerische Verbesserung mehr erzielt. Das Verfahren konvergiert oftmals sehr langsam, da es sich dem Optimum entweder mit einem starken Zick-Zack-Kurs nähert oder der Betrag des Gradienten in der Nähe des Optimums sehr klein ist, wodurch die Länge der Iterationsschritte dann ebenfalls sehr klein ist.

# Gradientenverfahren mit verschiedenen Startwerten





## Definition: Gradientenverfahren

$x_{i+1} = x_i - h \cdot \nabla J(x_i)$  mit Schrittweite  $h$  und Funktion  $J(x)$ .



## Aufgabe

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Auf einer Kreisscheibe mit Radius  $r$  sollen  $n$  Punkte  $p_i = (x_i, y_i)$  möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- a) Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion  $c(q)$ , die für gute Konfigurationen  $q$  minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.



## Aufgabe

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Auf einer Kreisscheibe mit Radius  $r$  sollen  $n$  Punkte  $p_i = (x_i, y_i)$  möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- a) Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion  $c(q)$ , die für gute Konfigurationen  $q$  minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.
- b) Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration  $q$  eine neue Konfiguration  $q'$ ?



## Aufgabe

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Auf einer Kreisscheibe mit Radius  $r$  sollen  $n$  Punkte  $p_i = (x_i, y_i)$  möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion  $c(q)$ , die für gute Konfigurationen  $q$  minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.
- Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration  $q$  eine neue Konfiguration  $q'$ ?
- Wie könnte eine initiale Konfiguration aussehen?



## Aufgabe

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Auf einer Kreisscheibe mit Radius  $r$  sollen  $n$  Punkte  $p_i = (x_i, y_i)$  möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion  $c(q)$ , die für gute Konfigurationen  $q$  minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.
- Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration  $q$  eine neue Konfiguration  $q'$ ?
- Wie könnte eine initiale Konfiguration aussehen?
- Brauchen Sie auch einen Straffunktion  $l(q)$ ? Wenn ja: welche und wozu? Wenn nein: warum nicht?



## Lösungsskizze

Eine Konfiguration  $q$  in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten  $(p_1, \dots, p_n)$ . Ein Übergang von einer Konfiguration  $q$  in eine Konfiguration  $q'$  entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

a)  $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$  wobei  $i \neq j$



## Lösungsskizze

Eine Konfiguration  $q$  in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten  $(p_1, \dots, p_n)$ . Ein Übergang von einer Konfiguration  $q$  in eine Konfiguration  $q'$  entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

- a)  $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$  wobei  $i \neq j$
- b) Gradientenabstiegsverfahren.  $q' := q - (\nabla c)(q) \cdot h$



## Lösungsskizze

Eine Konfiguration  $q$  in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten  $(p_1, \dots, p_n)$ . Ein Übergang von einer Konfiguration  $q$  in eine Konfiguration  $q'$  entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

- $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$  wobei  $i \neq j$
- Gradientenabstiegsverfahren.  $q' := q - (\nabla c)(q) \cdot h$
- Zufällige Anordnung der Punkte.



## Lösungsskizze

Eine Konfiguration  $q$  in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten  $(p_1, \dots, p_n)$ . Ein Übergang von einer Konfiguration  $q$  in eine Konfiguration  $q'$  entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

- a)  $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$  wobei  $i \neq j$
- b) Gradientenabstiegsverfahren.  $q' := q - (\nabla c)(q) \cdot h$
- c) Zufällige Anordnung der Punkte.
- d) Ja.  $l(q) = l(p_1, \dots, p_n) := \sum_{i=1}^n k \cdot \max\{r, |p_i|\}$



# Lektüreempfehlung

Goos, Vorlesungen über Informatik Band 4  
Kapitel 22.1

## Hausaufgabe 3

Gegeben seien vier Punkte

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

der Ebene.

- 1 Bestimmen Sie die Ausgleichsparabel

$$f(x) = a + bx^2$$

mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

- 2 Skizzieren Sie die Lösungskurve und die gegebenen Punkte.

# Lösung

Aus den vier zu approximierenden Punkten erstellen wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} (f(0) =) & a & & = & -5 \\ (f(1) =) & a & + & b & = & -1 \\ (f(2) =) & a & + & 4b & = & 3 \\ (f(3) =) & a & + & 9b & = & 5 \end{cases}$$



# Lösung

Aus den vier zu approximierenden Punkten erstellen wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} (f(0) =) & a & & = & -5 \\ (f(1) =) & a & + & b & = & -1 \\ (f(2) =) & a & + & 4b & = & 3 \\ (f(3) =) & a & + & 9b & = & 5 \end{cases}$$

bzw.  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$



## Übungsblatt 2

Mit der Methode der kleinsten Quadrate lösen wir die Normalgleichungen

$$A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{a},$$

also

$$\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 98 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem und erhalten die Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## Übungsblatt 2

Mit der Methode der kleinsten Quadrate lösen wir die Normalgleichungen

$$A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{a},$$

also

$$\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 98 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem und erhalten die Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die gesuchte Funktion ist also

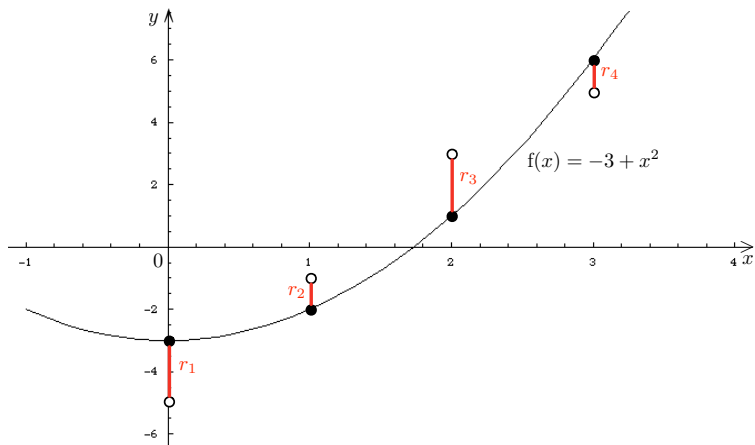
$$f(x) = -3 + x^2.$$

Das Residuum ist

$$\mathbf{r} = A \mathbf{x} - \mathbf{a} = [-3, -2, 1, 6]^t - [-5, -1, 3, 5]^t = [2, -1, -2, 1]^t.$$



## Übungsblatt 2





## Hausaufgabe 4

Für die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  eines Dreiecks gilt  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .  
Gegeben sei eine Näherungslösung

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77,5^\circ \\ 50,3^\circ \\ 45,0^\circ \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist  $\mathbf{q} = [\alpha, \beta, \gamma]^t$ , so dass  $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|_2$  minimal ist, wobei  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkel eines Dreiecks sind.

Lösen Sie das bedingte Ausgleichsproblem mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

# Lösung

Aus der Nebenbedingung  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  erhalten wir ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

$$B\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit  $B = [1 \ 1 \ 1]$ ,  $\mathbf{x} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^t$  und  $\mathbf{b} = [180]$ .

Wir suchen eine Lösung  $\mathbf{x}$ , die dem vorgegebenen  $\mathbf{p}$  am nächsten liegt, indem wir das folgende lineare Gleichungssystem lösen,

$$\begin{bmatrix} A^t A & B^t \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

wobei hier  $A$  die Einheitsmatrix ist.

Wir setzen  $A$ ,  $B$ ,  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{b}$  ein und erhalten

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77,5 \\ 50,3 \\ 45,0 \\ 180,0 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79,9 \\ 52,7 \\ 47,4 \\ -2,4 \end{bmatrix}.$$

Die gesuchten Winkel sind also  $79,9^\circ$ ,  $52,7^\circ$  und  $47,4^\circ$ .



## Definition: Levenberg-Marquardt-Algorithmus

Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus löst **allgemeine Optimierungsprobleme** iterativ und bestimmt in jedem Iterationsschritt zu einer Näherungslösung  $x_0$  eine nächste  $x_1 = x_0 + \vec{v}$ .

Das Verfahren setzt sich aus der Gauss-Newton-Methode und dem Gradientenabstieg zusammen.

Durch einfache mathematische Umformungen kommt man dann auf die Gleichung:  $(J^t J + \mu E) \vec{v} = J^t (\vec{p} - \vec{f}_0)$  mit Dämpfungsfaktor  $\mu$ .

Für grosse  $\mu$  verhält sich das Verfahren wie ein Gradientenabstiegsverfahren, das langsam aber sicher ist. Für kleine  $\mu$  verhält sich das Verfahren wie ein Gauss-Newton Verfahren mit schnellerer, quadratischer Konvergenz.



## Hausaufgabe 5

Gegeben seien die Abbildung  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

und der Punkt  $\mathbf{p} = [4, 2, 2]^t$ .

Gesucht ist ein  $\mathbf{x}$ , das den Term  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\|^2$  minimiert.

Berechnen Sie zum Startwert  $\mathbf{x}_0 = [1, -1]^t$  die nächsten zwei Näherungslösungen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  mit insgesamt zwei Schritten des Levenberg-Marquardt-Algorithmus, wenn  $\mu_1 = 2$  und  $\mu_2 = 1$  jeweils der Dämpfungsfaktor für den ersten und den zweiten Schritt sind.



# Lektüreempfehlung

`http://www.ics.forth.gr/%7Elourakis/levmar/levmar.pdf`



## Quellen

Pajor - Informatik 4 Tutorium SS2007

Prautzsch - Skript Informatik 4 SS2008

Goos, Vorlesungen über Informatik Band 4

Wikipedia



# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?



# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details



# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch
- Simplex-Verfahren mit Tableau

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch
- Simplex-Verfahren mit Tableau
- Gradientenabstieg



# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch
- Simplex-Verfahren mit Tableau
- Gradientenabstieg
- Levenberg-Marquardt Algorithmus



Noch Fragen?



# Vorschau

Am Freitag 22.05.2009 kein Tutorium. Ausweichtermin:  
Mittwoch 20.05.2009 8:00 Uhr SR131



# Vorschau

- Zufallsgesteuerte Optimierung

Am Freitag 22.05.2009 kein Tutorium. Ausweichtermin:  
Mittwoch 20.05.2009 8:00 Uhr SR131



# Vorschau

- Zufallsgesteuerte Optimierung
- Neuronale Netze

Am Freitag 22.05.2009 kein Tutorium. Ausweichtermin:  
Mittwoch 20.05.2009 8:00 Uhr SR131



## Bis zum nächsten Mal

