# Informatik IV - Tutorium XII & XIII (SR -120)

## Tut Nr. 7 – Informationstheorie

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Informatik
IBDS Prautzsch

11. Juni 2008

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

# Inhaltsverzeichnis

1 Auftakt

# Inhaltsverzeichnis

1. Auftakt
2. Lernziele

# Inhaltsverzeichnis

1. Auftakt
2. Lernziele
3. Themen
   - Übungsblatt 7
   - Grundbegriffe der Informationstheorie
   - Kanal
   - Codes

# Inhaltsverzeichnis

1. Auftakt
2. Lernziele
3. Themen
   - Übungsblatt 7
   - Grundbegriffe der Informationstheorie
   - Kanal
   - Codes
4. Abspann

# Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/

Tutorium 12: Donnerstags 8:00 Uhr - Raum -120
Tutorium 13: Donnerstags 9:45 Uhr - Raum -120

Übungsblattabgabe Donnerstag.

# Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.
Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

# Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.
Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

# Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.
Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

# Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben. Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

Um das Übungsteam zu unterstützen bitte folgendes Deckblatt verwenden:
`http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~unbdh/deckblatt/index.php?course=5`

# Literatur

Boehm, Prautzsch: Numerical Methods. AK Peters 1993. ISBN 3-528-06350-5
http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=7319953&nd=3204657

Ash: Information Theory. Dover 1990. ISBN 0-486-66521-6
http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&nd=9866904

Goos: Vorlesungen über Informatik. Bd. 4, Springer 1998. ISBN 3-540-60650-5
http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=9316367&nd=6568301

# Was wollen wir heute erreichen?

# Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 7 besprechen

# Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 7 besprechen
- Einführen von Grundbegriffen der Informationstheorie

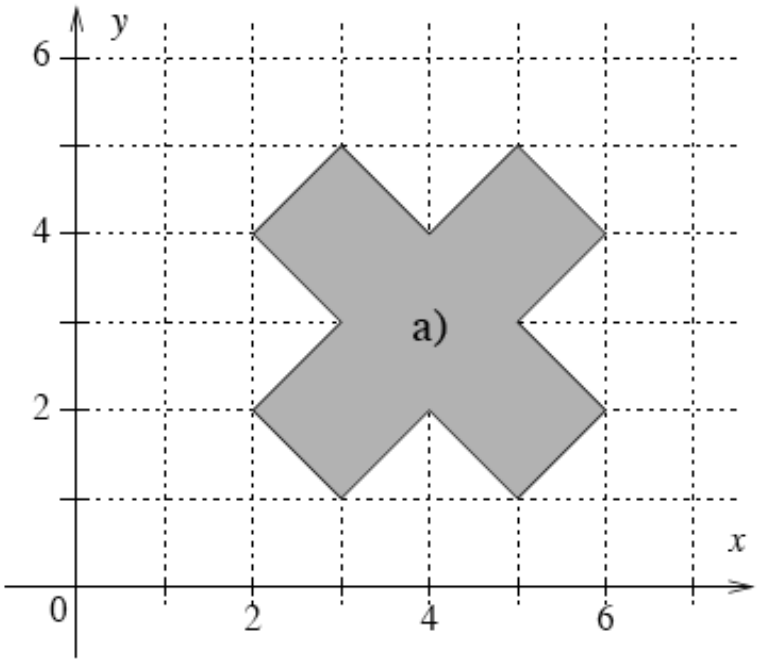
# Was wollen wir heute erreichen?

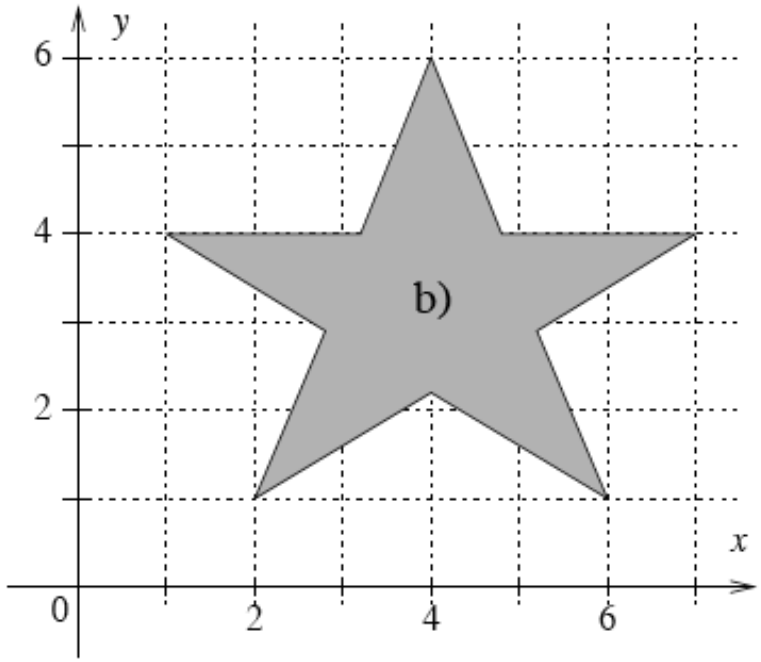
- Übungsblatt 7 besprechen
- Einführen von Grundbegriffen der Informationstheorie
- Überblick über Codes geben

# Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 7 besprechen
- Einführen von Grundbegriffen der Informationstheorie
- Überblick über Codes geben
- Kanäle verstehen

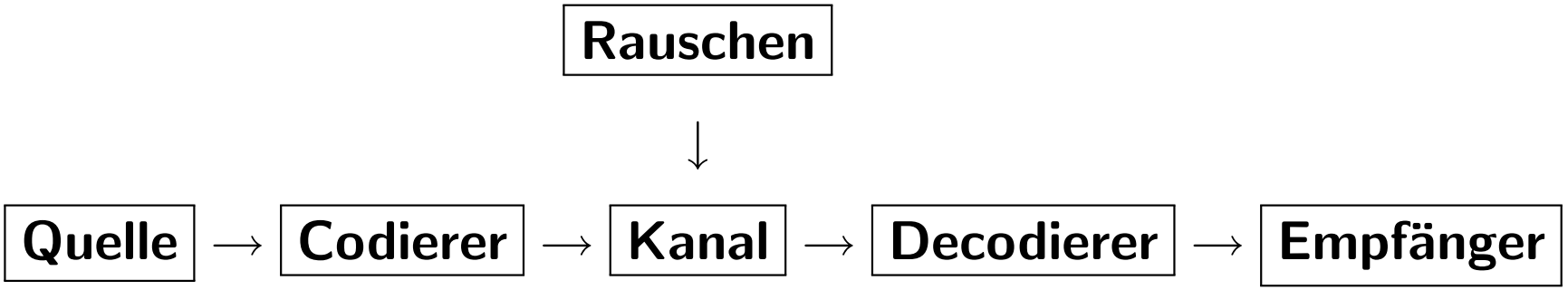
Übungsblatt 7



# Grundbegriffe der Informationstheorie

# Kommunikationssystem




Die Informationstheorie versucht nun die einzelnen Blöcke durch ein mathematisches Modell zu bescheiben.

# Zentrale Fragen der Informationstheorie

- Wieviel Information enthält eine Nachricht?

# Zentrale Fragen der Informationstheorie

- Wieviel Information enthält eine Nachricht?
- Wieviel von der Nachricht ist überflüssig?

# Zentrale Fragen der Informationstheorie

- Wieviel Information enthält eine Nachricht?
- Wieviel von der Nachricht ist überflüssig?
- Kann die Nachricht noch gelesen werden wenn Störungen auftreten?

Beispiel:
Sendet man statt einer $1$ $n$ Einsen, dann kann man für $n \longrightarrow \infty$ die Fehlerwahrscheinlichkeit beliebig klein machen auf Kosten der Übertragungsgeschwindigkeit.

Beispiel:
Sendet man statt einer 1 $n$ Einsen, dann kann man für $n \longrightarrow \infty$ die Fehlerwahrscheinlichkeit beliebig klein machen auf Kosten der Übertragungsgeschwindigkeit.

**Fundamentalsatz der Informationstheorie bzw. Shannonsches Kanalcodierungstheorem**

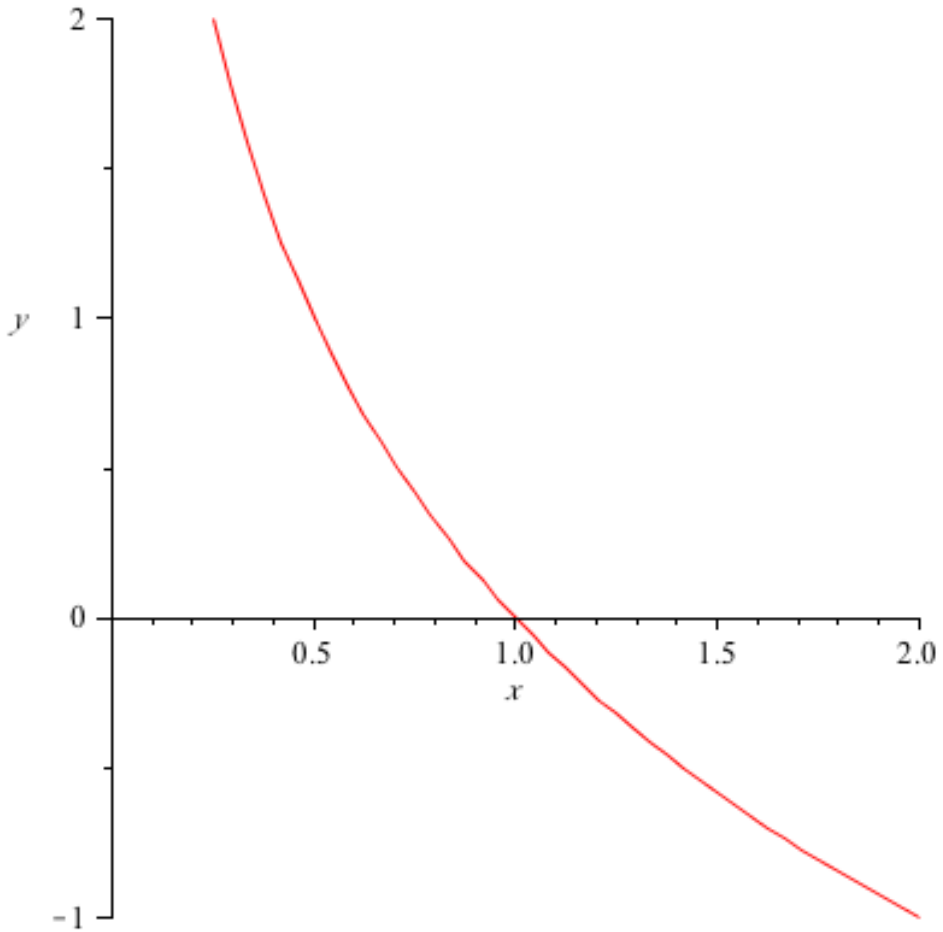
Für einen rauschbehafteten Kanal mit der Kanalkapazität $C$ existiert ein Kodierungsverfahren, so dass für eine Übertragungsrate $R < C$ die Fehlerwahrscheinlichkeit am Empfänger beliebig klein gemacht werden kann. Das heisst, dass es dann theoretisch möglich ist, Information fehlerfrei zu übertragen. Für $R > C$ ist keine fehlerfreie Übertragung möglich.

# Entropie

## Definition:

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit den unabhängigen Ereignissen $x_1, ..., x_m$ und sei $p_i = p(x_i) = P(X = x_i)$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $x_i$, das mit der Unsicherheit (Information) $h(x_i)$ behaftet ist.
Eine Ereignissfolge $x_i x_j$ tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p_{ij} = p(x_i x_j) = p_i \cdot p_j$ auf und hat die Unsicherheit $h(p_{ij}) = h(p_i) + h(p_j)$.
U.a. daraus folgt, dass die Unsicherheitsfunktion (oder Information eines Zeichens) von der Gestalt $h(p) = -\log_b p$ sein muss.

# Entropie



# Entropie

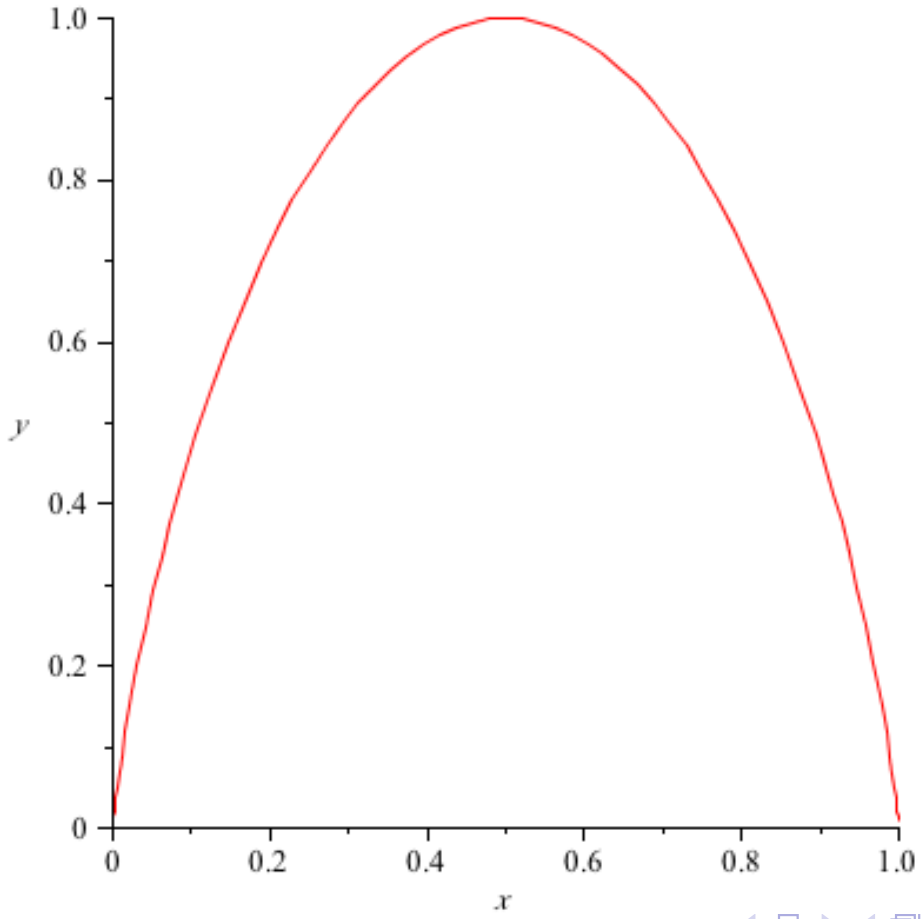
## Definition: Entropie

Die Entropie (Informationsgehalt) einer Zufallsvariablen $X$ ist $H(X) = H(p_1, ..., p_m) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i$

Die Entropie ist die Information pro Zeichen, die wir erwarten.
Oder: Die Entropie ist die durchschnittliche Anzahl von Entscheidungen (bits), die benötigt werden, um ein Zeichen aus einer Zeichenmenge zu identifizieren oder zu isolieren.

# Entropie

Beispiel: Entopie von Münzen: $H(p, 1-p)$



## Aufgabe

Ein Empfänger beobachtet eine Quelle über dem Alphabet $X = \{A, B, C, D, R\}$, die folgende Zeichen aussendet:

$$S := ABRACADABRA$$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $S$.

b) Welche Information hat das Zeichen $A$, welche das Zeichen $C$?

c) Wieviel Bits sind nötig um $S$ zu codieren?

# Lösung

a) $|S| = 11$
$\Rightarrow p_A = 5/11, p_B = 2/11, p_C = 1/11, p_D = 1/11, p_R = 2/11$

# Lösung

a) $|S| = 11$
$\Rightarrow p_A = 5/11, p_B = 2/11, p_C = 1/11, p_D = 1/11, p_R = 2/11$

b) Mit $I(x_i) = h(p_i) = -\log p_i$ folgt:
$I(A) = -\log 5/11 \approx 1,137 bit$
$I(C) = -\log 1/11 \approx 3,459 bit$

# Lösung

a) $|S| = 11$
$\Rightarrow p_A = 5/11, p_B = 2/11, p_C = 1/11, p_D = 1/11, p_R = 2/11$

b) Mit $I(x_i) = h(p_i) = -\log p_i$ folgt:
$I(A) = -\log 5/11 \approx 1,137 bit$
$I(C) = -\log 1/11 \approx 3,459 bit$

c) Berechne Informationsgehalt der kompletten Zeichenkette.
Entropie:
$H(X) = -\sum_{i=1}^{5} p_i \log p_i \approx 2,04 bit/Zeichen$
Multiplizieren von $H(X)$ mit der Länge der Zeichenkette:
$H(X) \cdot |S| = 22,444 bit$
$\Rightarrow$ minimale Anzahl benötigter Bits beträgt 23.

# Gemeinsame Entropie

Seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen mit den Werten $x_1, ..., x_m$ bzw. $y_1, ..., y_n$.
Sei $p_{ij} = p(x_i y_j) = P(X = x_i \text{ und } Y = y_j)$.
Wenn $x_i$ und $y_i$ (wie oben) unabhängig sind,
dann gilt: $p_{ij} = p(x_i) \cdot p(y_j)$
sonst $p_{ij} = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) = p(y_j) \cdot p(x_i|y_j)$.

## Definition: Gemeinsame Entropie

Die Gemeinsame Entropie von $X$ und $Y$ ist
$H(X, Y) = H(p_{11}, .., p_{mn}) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}$

# Gemeinsame Entropie

Seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen mit den Werten $x_1, ..., x_m$ bzw. $y_1, ..., y_n$.
Sei $p_{ij} = p(x_i y_j) = P(X = x_i \text{ und } Y = y_j)$.
Wenn $x_i$ und $y_i$ (wie oben) unabhängig sind,
dann gilt: $p_{ij} = p(x_i) \cdot p(y_j)$
sonst $p_{ij} = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) = p(y_j) \cdot p(x_i|y_j)$.

## Definition: Gemeinsame Entropie

Die Gemeinsame Entropie von $X$ und $Y$ ist
$H(X, Y) = H(p_{11}, .., p_{mn}) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}$

## Satz

$H(X_1, ..., X_n) \leq H(X_1) + ... + H(X_n)$, mit Gleichheit $\Leftrightarrow$ $X_i$ unabhängig.

# Bedingte Entropie

## Definition: Bedingte Entropie

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \cdot \log p(x_i|y_j)$$

# Bedingte Entropie

## Definition: Bedingte Entropie

$$H(X|Y) = -\sum_{i,j} p_{ij} \cdot \log p(x_i|y_j)$$

## Satz

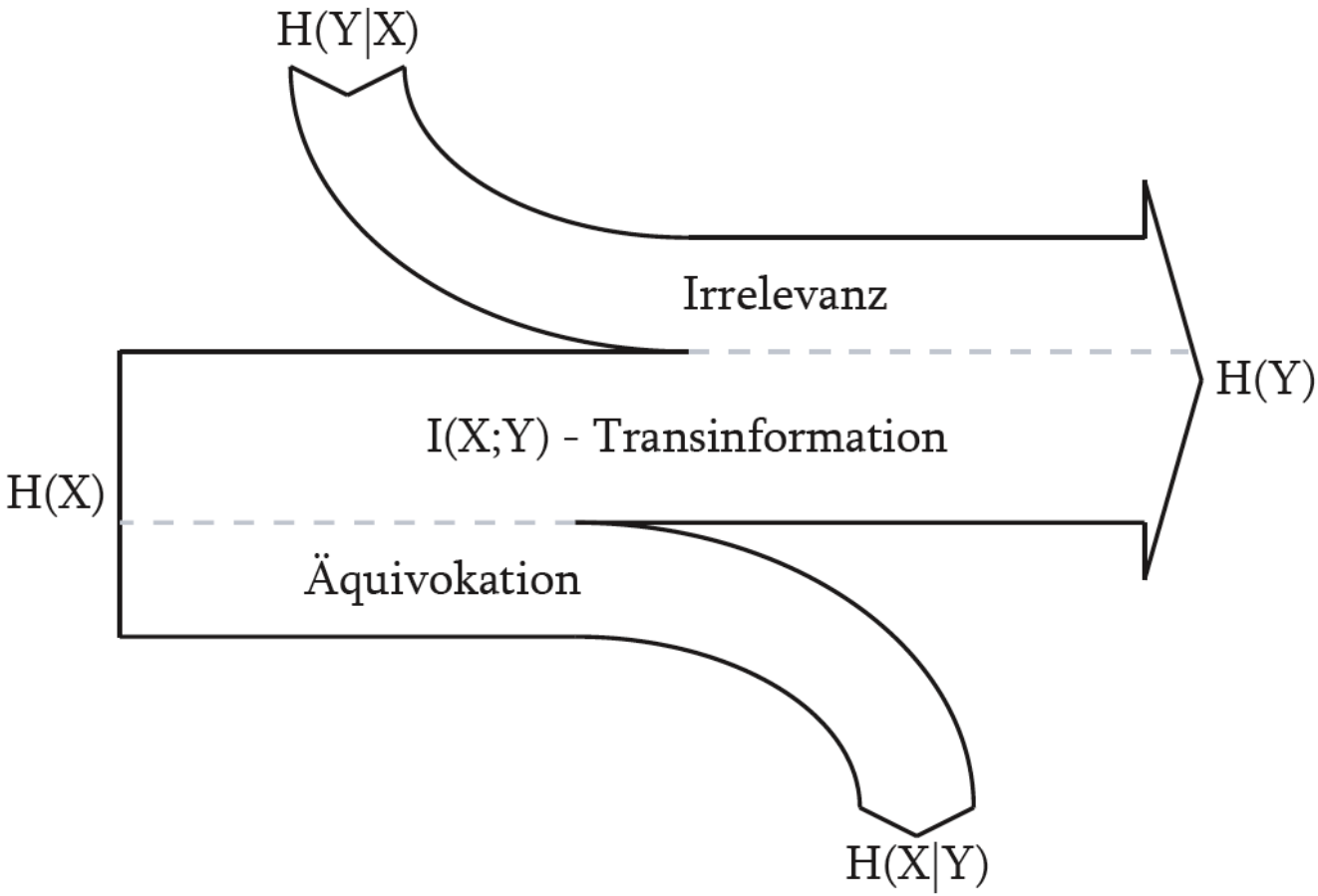
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

# Information

## Definition: Information

Information ist die beseitigte Unsicherheit. D.h. die durch Kenntnis von $Y$ über $X$ erzielbare Information ist:
$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = I(Y|X) \geq 0$

# Übertragungskanal



# Zusammenfassung

Transinformation: $I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = I(Y|X)$

# Zusammenfassung

Transinformation: $I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = I(Y|X)$
Äquivokation: $H(X|Y) = H(X) - I(X|Y)$

# Zusammenfassung

Transinformation: $I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = I(Y|X)$
Äquivokation: $H(X|Y) = H(X) - I(X|Y)$
Irrelevanz: $H(Y|X) = H(Y) - I(X|Y)$

# Zusammenfassung

Transinformation: $I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = I(Y|X)$
Äquivokation: $H(X|Y) = H(X) - I(X|Y)$
Irrelevanz: $H(Y|X) = H(Y) - I(X|Y)$
Totalinformation: $H(Y|X) + I(X|Y) + H(X|Y)$

# Kanaleigenschaften

- deterministisch: $H(Y|X) = 0$

# Kanaleigenschaften

- deterministisch: $H(Y|X) = 0$
- verlustfrei: $H(X|Y) = 0$

# Kanaleigenschaften

- deterministisch: $H(Y|X) = 0$
- verlustfrei: $H(X|Y) = 0$
- störungsfrei: $H(X|Y) = H(Y|X) = 0$

# Kanaleigenschaften

- deterministisch: $H(Y|X) = 0$
- verlustfrei: $H(X|Y) = 0$
- störungsfrei: $H(X|Y) = H(Y|X) = 0$
- nutzlos: $I(X|Y) = 0$

# Kanaleigenschaften

- deterministisch: $H(Y|X) = 0$
- verlustfrei: $H(X|Y) = 0$
- störungsfrei: $H(X|Y) = H(Y|X) = 0$
- nutzlos: $I(X|Y) = 0$

Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn der Kanal nutzlos ist.
$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

# Kanalkapazität

## Definition: Kanalkapazität

$C = max_{P(X)}\{I(X|Y)\}$
$C$ ist die höchste Informationsmenge, die unter allen möglichen Quellenverteilungen über den Kanal übertragen werden kann.

## Aufgabe

Gegeben sei folgender binärer, asymetrischer Kanal über den Alphabeten $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$:

$$P(0|0) = 1 - \beta \quad P(1|0) = \beta$$
$$P(0|1) = 0 \quad P(1|1) = 1$$

a) Für welches $\beta$ hat der Kanal maximale Kapazität?

## Aufgabe

Gegeben sei folgender binärer, asymetrischer Kanal über den Alphabeten $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$:

$$P(0|0) = 1 - \beta \quad P(1|0) = \beta$$
$$P(0|1) = 0 \quad P(1|1) = 1$$

a) Für welches $\beta$ hat der Kanal maximale Kapazität?

b) Für welches $H(X)$ wird bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung $\beta$ der Wert von $H(Y)$ maximal?

## Aufgabe

Gegeben sei folgender binärer, asymetrischer Kanal über den Alphabeten $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$:

$$P(0|0) = 1 - \beta \quad P(1|0) = \beta$$
$$P(0|1) = 0 \quad P(1|1) = 1$$

a) Für welches $\beta$ hat der Kanal maximale Kapazität?

b) Für welches $H(X)$ wird bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung $\beta$ der Wert von $H(Y)$ maximal?

c) Berechne Irrelevanz, Äquivokation und Transinformation für $\beta = 0.9$ und Gleichverteilung auf $X$.

# Redundanz

Redundanz ist überflüssige Information. D.h. sie sieht aus wie Information, ist aber keine.

## Definition: Absolute Redundanz

$R_{abs} = \tilde{H} - H$ mit

Realinformation (Entropie)

$H = \mathbb{E}(h(p_i)) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot h(p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i$

Nominalinformation

$\tilde{H} = \mathbb{E}(\text{Länge}(code_i)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \text{Länge}(code_i)$

# Redundanz

Redundanz ist überflüssige Information. D.h. sie sieht aus wie Information, ist aber keine.

## Definition: Absolute Redundanz

$R_{abs} = \tilde{H} - H$ mit

Realinformation (Entropie)

$H = \mathbb{E}(h(p_i)) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot h(p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i$

Nominalinformation

$\tilde{H} = \mathbb{E}(\text{Länge}(code_i)) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \text{Länge}(code_i)$

## Definition: Relative Redundanz

$R_{rel} = 1 - \frac{H}{\tilde{H}}$

## Definition: Codierung

Sei $\mathbb{A} = \{a_1, .., a_m\}$ ein Alphabet und $A$ eine Zufallsvariable über $\mathbb{A}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(A = a_i)$. Eine Codierung von $A$ über einem Codealphabet $\mathbb{X} = \{x_1, .., x_d\}$ ist eine Abbildung: $C : \mathbb{A} \to \mathbb{X}^+$. Diese wird für ganze Worte erweitert: $C^* : \mathbb{A}^* \to \mathbb{X}^*$, $a_{i_1}...a_{i_k} = c_{i_1}...c_{i_k}$

## Definition: Codierung

Sei $\mathbb{A} = \{a_1, .., a_m\}$ ein Alphabet und $A$ eine Zufallsvariable über $\mathbb{A}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(A = a_i)$. Eine Codierung von $A$ über einem Codealphabet $\mathbb{X} = \{x_1, .., x_d\}$ ist eine Abbildung: $C : \mathbb{A} \to \mathbb{X}^+$. Diese wird für ganze Worte erweitert: $C^* : \mathbb{A}^* \to \mathbb{X}^*$, $a_{i_1}...a_{i_k} = c_{i_1}...c_{i_k}$

## Definition: Codelänge

Die mittlere Codelänge ist $L(C) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot l_i$

# Codeeigenschaften

- regulär, wenn $C$ injektiv

# Codeeigenschaften

- regulär, wenn $C$ injektiv
- dekodierbar, wenn $C^*$ injektiv

# Codeeigenschaften

- regulär, wenn $C$ injektiv
- dekodierbar, wenn $C^*$ injektiv
- Präixcode, wenn kein $c_i$ Präfix eines andern $c_j$ ist.

# Konstruktion optimaler Codes

## Satz

Für jeden Präfix- und dekodierbaren Code gilt die Kraft-Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{m} d^{-l_i} \leq 1$$

Wenn diese Gleichung erfüllt ist, gibt es einen Präfix- bzw. dekodierbaren Code mit diesen Längen $l_i$

# Kodierungstheorem

**Theorem**

Die Länge eines dekodierbaren Codes $C$ ist mindestens so gross wie die Entropie der Zufallsvariablen $A$:
$L(C) \geq H_d(p)$
mit Gleichheit $\Leftrightarrow d^{-l_i} = p_i$ für alle $i$.

# Kodierungstheorem

**Theorem**

Die Länge eines dekodierbaren Codes $C$ ist mindestens so gross wie die Entropie der Zufallsvariablen $A$:
$L(C) \geq H_d(p)$
mit Gleichheit $\Leftrightarrow d^{-l_i} = p_i$ für alle $i$.

Ein optimaler Präfixcode $L^*$ hat die Länge:
$H_d(p) \leq L^* < L(C) < H_d(p) + 1$

# Quellen

Pajor - Informatik 4 Tutorium SS2007

Prautzsch - Skript Informatik 4 SS2008

Ash: Information Theory. Dover 1990. ISBN 0-486-66521-6
http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&nd=9866904

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 7 besprochen

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 7 besprochen
- Grundbegriffe der Informationstheorie kennen gelernt

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 7 besprochen
- Grundbegriffe der Informationstheorie kennen gelernt
- Verschiedene Codes betrachtet

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 7 besprochen
- Grundbegriffe der Informationstheorie kennen gelernt
- Verschiedene Codes betrachtet
- Diskrete Kanäle behandelt

Noch Fragen?

# Vorschau

# Vorschau

- Kanäle

# Vorschau

- Kanäle
- Fehlerkorrigierende Codes

# Bis zum nächsten Mal