Informatik IV - Tutorium XII & XIII (SR -120)

Tut Nr. 2 – Optimierung von Funktionen

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Informatik
IBDS Prautzsch

8. Mai 2008

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/

Tutorium 12: Donnerstags 8:00 Uhr - Raum -120
Tutorium 13: Donnerstags 9:45 Uhr - Raum -120

Übungsblattabgabe Donnerstag.

Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.
Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben. Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben. Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

Schein / Übungsblätter

Nur die mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben. Diese werden korrigiert und bewertet.
66% der Punkte aller mit (**K**) gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

Um das Übungsteam zu unterstützen bitte folgendes Deckblatt verwenden:
`http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~unbdh/deckblatt/index.php?course=5`

Literatur

Boehm, Prautzsch: Numerical Methods. AK Peters 1993. ISBN 3-528-06350-5
`http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=7319953&nd=3204657`

Ash: Information Theory. Dover 1990. ISBN 0-486-66521-6
`http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&nd=9866904`

Goos: Vorlesungen über Informatik. Bd. 4, Springer 1998. ISBN 3-540-60650-5
`http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=9316367&nd=6568301`

Was wollen wir heute erreichen?

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 2 besprechen

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 2 besprechen
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus wiederholen

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 2 besprechen
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus wiederholen
- Gradientenverfahren wiederholen

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 2 besprechen
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus wiederholen
- Gradientenverfahren wiederholen
- Ausgleichsverfahren kennen lernen

Aufgabe 11 (**K**, $2+1=3$ Punkte)

Gegeben seien vier Punkte

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

der Ebene.

1. Bestimmen Sie die Ausgleichsparabel

$$\mathrm{f}(x) = a + bx^2$$

   mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.
2. Skizzieren Sie die Lösungskurve und die gegebenen Punkte.

Lösung

Aus den vier zu approximierenden Punkten erstellen wir ein lineares Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} (\mathrm{f}(0) =) & a & & & = & -5 \\ (\mathrm{f}(1) =) & a & + & b & = & -1 \\ (\mathrm{f}(2) =) & a & + & 4b & = & 3 \\ (\mathrm{f}(3) =) & a & + & 9b & = & 5 \end{array}\right.$$

Lösung

Aus den vier zu approximierenden Punkten erstellen wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} (\mathrm{f}(0) =) & a & & & = & -5 \\ (\mathrm{f}(1) =) & a & + & b & = & -1 \\ (\mathrm{f}(2) =) & a & + & 4b & = & 3 \\ (\mathrm{f}(3) =) & a & + & 9b & = & 5 \end{cases}$$

bzw. $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Mit der Methode der kleinsten Quadrate lösen wir die Normalengleichungen

$$A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{a},$$

also

$$\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 98 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem und erhalten die Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mit der Methode der kleinsten Quadrate lösen wir die Normalengleichungen

$$A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{a},$$

also

$$\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 98 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem und erhalten die Lösung

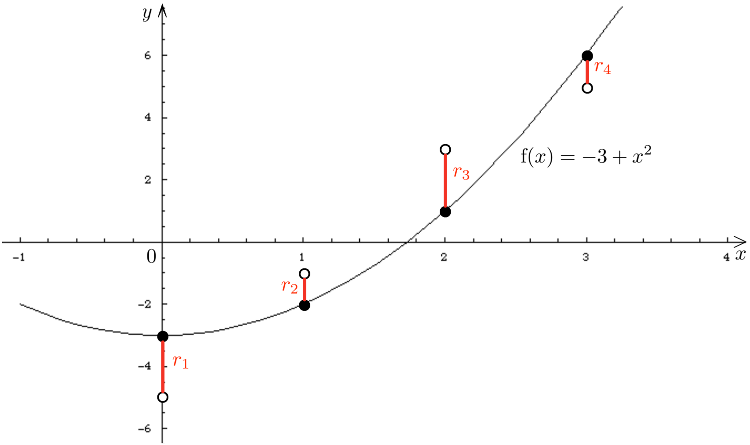
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die gesuchte Funktion ist also

$$\mathrm{f}(x) = -3 + x^2.$$

Das Residuum ist

$$\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{a} = [-3, -2, 1, 6]^t - [-5, -1, 3, 5]^t = [2, -1, -2, 1]^t.$$


y
6
4
2
-2
-4
-6
-1
0
1
2
3
4
x
r_1
r_2
r_3
r_4
$\mathrm{f}(x) = -3 + x^2$

Aufgabe 12 (**K**, 3 Punkte)

Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Gegeben sei eine Näherungslösung

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77,5° \\ 50,3° \\ 45,0° \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist $\mathbf{q} = [\alpha, \beta, \gamma]^t$, so dass $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|_2$ minimal ist, wobei α, β und γ die Winkel eines Dreicks sind.
Lösen Sie das bedingte Ausgleichsproblem mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

Lösung

Aus der Nebenbedingung $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ erhalten wir ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

$$B\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $B = [1 \quad 1 \quad 1]$, $\mathbf{x} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^t$ und $\mathbf{b} = [180]$.
Wir suchen eine Lösung $\mathbf{x}$, die dem vorgegebenen $\mathbf{p}$ am nächsten liegt, indem wir das folgende lineare Gleichungssystem lösen,

$$\begin{bmatrix} A^t A & B^t \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

wobei hier A die Einheitsmatrix ist.

Wir setzen A, B, $\mathbf{p}$ und $\mathbf{b}$ ein und erhalten

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77,5 \\ 50,3 \\ 45,0 \\ 180,0 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79,9 \\ 52,7 \\ 47,4 \\ -2,4 \end{bmatrix}.$$

Die gesuchten Winkel sind also $79,9^\circ$, $52,7^\circ$ und $47,4^\circ$.

Aufgabe 13 (**K**, 4 Punkte)

Gegeben seien die Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

und der Punkt $\mathbf{p} = [4, 2, 2]^t$.
Gesucht ist ein $\mathbf{x}$, das den Term $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\|^2$ minimiert.
Berechnen Sie zum Startwert $\mathbf{x}_0 = [1, -1]^t$ die nächsten zwei Näherungslösungen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ mit insgesamt zwei Schritten des Levenberg-Marquardt-Algorithmus, wenn $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 1$ jeweils der Dämpfungsfaktor für den ersten und den zweiten Schritt sind.

Definition: Optimierungsproblem

Ein Optimierungsproblem $P = (Q, c, l)$ besteht aus:

Definition: Optimierungsproblem

Ein Optimierungsproblem $P = (Q, c, l)$ besteht aus:

- einem Suchraum Q, in dem die Lösungen zu suchen sind.

Definition: Optimierungsproblem

Ein Optimierungsproblem $P = (Q, c, l)$ besteht aus:

- einem Suchraum Q, in dem die Lösungen zu suchen sind.
- einer Bewertungs- bzw. Kostenfunktion $c : Q \rightarrow \mathbb{R}$

Definition: Optimierungsproblem

Ein Optimierungsproblem $P = (Q, c, l)$ besteht aus:

- einem Suchraum Q, in dem die Lösungen zu suchen sind.
- einer Bewertungs- bzw. Kostenfunktion $c : Q \rightarrow \mathbb{R}$
- einer Straffunktion $l : Q \rightarrow \mathbb{R}$, die mit $l(q) = 0$ eine Lösung charakterisiert.

Definition: Optimierungsproblem

Ein Optimierungsproblem $P = (Q, c, l)$ besteht aus:

- einem Suchraum Q, in dem die Lösungen zu suchen sind.
- einer Bewertungs- bzw. Kostenfunktion $c : Q \to \mathbb{R}$
- einer Straffunktion $l : Q \to \mathbb{R}$, die mit $l(q) = 0$ eine Lösung charakterisiert.

Die Bewertungsfunktion kann umformuliert werden zu:
$c'(q) = c(q) + \lambda l(q)$

Gradientenverfahren

Gradientenverfahren

- Suchraum $Q \subset \mathbb{R}^n$. Lösungskandidaten sind Punkte $q = (x_1, ..., x_n) \in Q$

Gradientenverfahren

- Suchraum $Q \subset \mathbb{R}^n$. Lösungskandidaten sind Punkte $q = (x_1, ..., x_n) \in Q$
- Sei $q = q_0$ Anfangspunkt. Bestimme Gradient von c am Punkt q:
  $\nabla c(q) = (\frac{\partial c}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial c}{\partial x_n})$

Gradientenverfahren

- Suchraum $Q \subset \mathbb{R}^n$. Lösungskandidaten sind Punkte $q = (x_1, ..., x_n) \in Q$
- Sei $q = q_0$ Anfangspunkt. Bestimme Gradient von c am Punkt q:
  $\nabla c(q) = (\frac{\partial c}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial c}{\partial x_n})$
- Die Nachfolger p werden definiert durch:
  $p = (x_1 + h\frac{\partial c}{\partial x_1}, ..., x_n + h\frac{\partial c}{\partial x_n})$

Gradientenverfahren

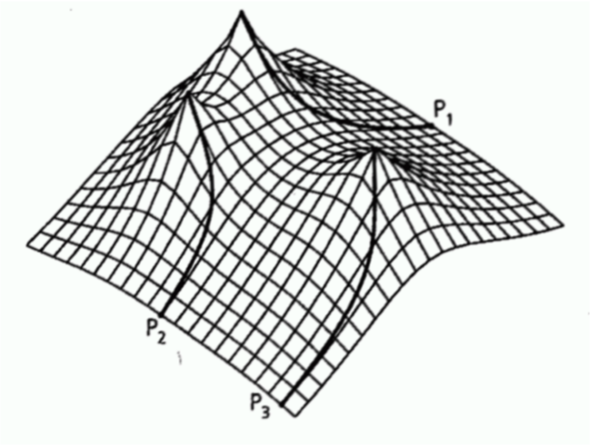
- Suchraum $Q \subset \mathbb{R}^n$. Lösungskandidaten sind Punkte $q = (x_1, ..., x_n) \in Q$
- Sei $q = q_0$ Anfangspunkt. Bestimme Gradient von c am Punkt q:
  $\nabla c(q) = (\frac{\partial c}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial c}{\partial x_n})$
- Die Nachfolger p werden definiert durch:
  $p = (x_1 + h\frac{\partial c}{\partial x_1}, ..., x_n + h\frac{\partial c}{\partial x_n})$
- wobei h eine (emirisch bestimmte) Schrittweite darstellt, die bei Maximierungsproblemen positiv, bei Minimierungsproblemn negativ zu wählen ist.

Gradientenverfahren

Anmerkungen/Probleme:

- Schrittweite h bestimmt also, wie weit man der Richtung $\nabla c(q)$ folgt
- Gradientenverfahren folgt immer der Richtung, in der sich c am schnellsten ändert
- Gradientenverfahren kann in lokalem Optimum hängenbleiben

Gradientenverfahren mit verschiedenen Startwerten

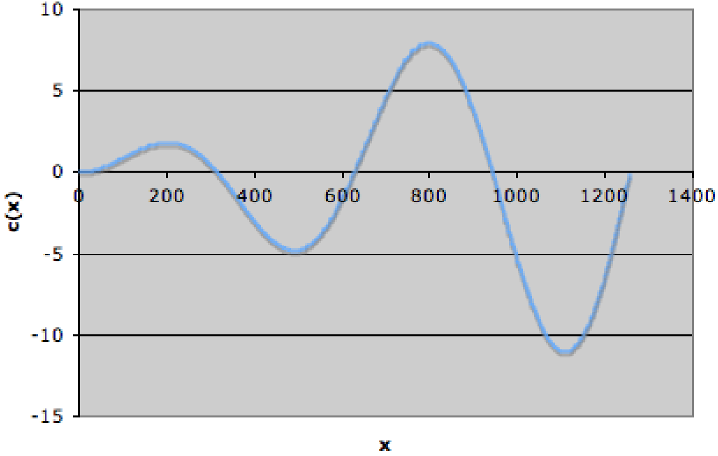


Aufgabe

Seien $n = 1, Q = [0, 4\pi] \subset \mathbb{R}$ und $c(x) = xsin(x)$
Führe das Gradientenverfahren zur Minimierung von c beginnend mit dem Startpunkt $q_0 = 3$ und $h = -0.5(-0.2, -0.1)$ durch. Wird das globale Minimum erreicht?

Aufgabe

Seien $n = 1, Q = [0, 4\pi] \subset \mathbb{R}$ und $c(x) = xsin(x)$
Führe das Gradientenverfahren zur Minimierung von c beginnend mit dem Startpunkt $q_0 = 3$ und $h = -0.5(-0.2, -0.1)$ durch. Wird das globale Minimum erreicht?
Welchen besseren Startpunkt sollte man wählen, um das globale Minimum zu erreichen?


10
5
0
-5
-10
-15
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
c(x)
x

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt Nr. 2 besprochen

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt Nr. 2 besprochen
- Levenberg-Marquardt Algorithmus wiederholt.

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt Nr. 2 besprochen
- Levenberg-Marquardt Algorithmus wiederholt.
- Gradientenverfahren wiederholt.

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt Nr. 2 besprochen
- Levenberg-Marquardt Algorithmus wiederholt.
- Gradientenverfahren wiederholt.
- Ausgleichsverfahren angewendet.

Noch Fragen?

Vorschau

Vorschau

- Pool-Adjacent-Violator Algorithmus

Vorschau

- Pool-Adjacent-Violator Algorithmus
- Zufallsgesteuerte Optimierung

Vorschau

- Pool-Adjacent-Violator Algorithmus
- Zufallsgesteuerte Optimierung
- Neuronale Netze

Bis zum nächsten Mal