Informatik IV - Tutorium XII & XIII (SR -120)

Tut Nr. 11 – Haar-Wavelets, Bivariate Wavelets

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Informatik
IBDS Prautzsch

10. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/∼uhbro/

Tutorium 12: Donnerstags 8:00 Uhr - Raum -120
Tutorium 13: Donnerstags 9:45 Uhr - Raum -120

Übungsblattabgabe Donnerstag.

Was wollen wir heute erreichen?

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 11 besprechen

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 11 besprechen
- Haar-Wavelets verstehen und anwenden können

Was wollen wir heute erreichen?

- Übungsblatt 11 besprechen
- Haar-Wavelets verstehen und anwenden können
- Wavelets auf 2D-Bilder erweitern

Aufgabe 62

Beweisen Sie den letzten Satz der Vorlesung aus Kapitel 8.16:

$$P(l > l' + 1) \leq P(l < l' + 1) \quad ,$$

wobei $p(x)$ eine beliebige Wahrscheinlichkeit ist.

Aufgabe 63

Betrachten Sie den binären Übertragungskanal $X \rightarrow Y$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(y_i|x_j)$:

$$p(0|0) = \frac{2}{3} \qquad p(1|0) = \frac{1}{3}$$
$$p(0|1) = 0 \qquad p(1|1) = 1$$

Wie groß sind $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X,Y)$ und $H(X,Y)$, wenn $H(Y)$ maximal ist?

$H(Y)$ ist maximal (also $H(Y) = 1$), wenn $P(Y{=}1) = P(Y{=}0) = \frac{1}{2}$. Aus $P(Y{=}0) = \frac{2}{3} \cdot P(X{=}0)$ folgt für die Quelle $P(X{=}0) = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ und $P(X{=}1) = 1 - P(X{=}0) = \frac{1}{4}$.

Daher ist die Quellen-Entropie $H(X) = H(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 0{,}500 \text{ bit} + 0{,}311 \text{ bit} = 0{,}811 \text{ bit}$.

Die Verbund-Entropie berechnet sich aus den Wahrscheinlichkeiten $P(X{=}x, Y{=}y) = P(X{=}x) \cdot p(y|x)$ aller kombinierten Fälle:

$$H(X,Y) \;=\; H\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \;=\; 3 \cdot 0{,}500 \text{ bit} \;=\; \frac{3}{2} \text{ bit}$$

Somit lassen sich die bedingten Informationsgehalte ermitteln:

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= H(X,Y) - H(Y) \\ &= \frac{3}{2}\text{ bit} - 1\text{ bit} = \frac{1}{2}\text{ bit} \\ H(Y|X) &= H(X,Y) - H(X) \\ &= 1{,}5\text{ bit} - 0{,}811\text{ bit} = 0{,}689\text{ bit} \end{aligned}$$

Nun läßt sich auch die Information des Kanals in diesem Betriebsmodus angeben:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0{,}311\text{ bit}$$

Aufgabe 64

Ein Bitstrom X, bei dem mit Wahrscheinlichkeit $\beta \gg \frac{1}{2}$ Nullen auftreten, werde in einen Bitstrom Y transformiert. Um zu komprimieren, sollen Blöcke der Form 0^n1, $n = 0, \ldots, 9$ und 0^{10} Huffman kodiert werden.

1. Stellen Sie eine Kodierungstabelle für die Metazeichen 0^n1 und 0^{10} auf. Berechnen Sie zunächst die Auftrittswahrscheinlichkeiten für die Metazeichen (Wörter der Eingabe) 1, 01, 001, ..., 0^91 und 0^90, wenn $\beta = 85\%$ gewählt wird.

   Gehen Sie so vor, daß (bei Verzweigungen von zwei Huffman-Kodewörtern mit gleichem Präfix) stets die unwahrscheinlichere Alternative mit “0” und die wahrscheinlichere mit “1” kodiert wird. Hierdurch wird die Kodierungstabelle eindeutig festgelegt.

2. Die Ausgabe – der von Ihnen ermittelte Huffman-Kode – sei mit Y bezeichnet. Berechnen Sie die (relative) Redundanz von Y und vergleichen Sie sie mit der Redundanz des ursprünglichen Bitstroms der Eingabe X.

Metazeichen	Auftrittsw.	Zahlenwert
1	$1-\beta$	0,1500
01	$\beta(1-\beta)$	0,1275
001	$\beta^2(1-\beta)$	0,1084
0001	$\beta^3(1-\beta)$	0,0921
00001	$\beta^4(1-\beta)$	0,0783
000001	$\beta^5(1-\beta)$	0,0666
0000001	$\beta^6(1-\beta)$	0,0566
00000001	$\beta^7(1-\beta)$	0,0481
000000001	$\beta^8(1-\beta)$	0,0409
0000000001	$\beta^9(1-\beta)$	0,0347
0000000000	β^{10}	0,1969

Eingabe X	Auftrittsw.	Kodierung Y
1	0,1500	110
01	0,1275	100
001	0,1084	011
0001	0,0921	1111
00001	0,0783	1110
000001	0,0666	1010
0000001	0,0566	0101
00000001	0,0481	0100
000000001	0,0409	10111
0000000001	0,0347	10110
0000000000	0,1969	00

$$
\begin{aligned}
L(Y) &= \sum_i p(Y=y_i) \cdot l(y_i) \\
&\approx (15\% + 12{,}75\% + 10{,}84\%) \cdot 3 \text{ bit} \\
&\quad +(9{,}21\% + 7{,}83\% + 6{,}66\% + 5{,}66\% + 4{,}81\%) \cdot 4 \text{ bit} \\
&\quad +(4{,}09\% + 3{,}47\%) \cdot 5 \text{ bit } + 19{,}69\% \cdot 2 \text{ bit} \\
&= 3{,}2963 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

Für $H(Y)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= -\sum_i p(Y = y_i) \cdot \log p(Y = y_i) \\
&\approx H(\ 15\%\ ,\ 12{,}75\%\ ,\ 10{,}84\%\ ,\ 9{,}21\%\ ,\ 7{,}83\%\ ,\ 6{,}66\%\ , \\
&\qquad 5{,}66\%\ ,\ 4{,}81\%\ ,\ 4{,}09\%\ ,\ 3{,}47\%\ ,\ 19{,}69\%\ ) \\
&\approx 3{,}2654 \text{ bit}
\end{aligned}
$$

Die Redundanz beträgt daher

$$
R(Y) = 1 - \frac{H(Y)}{L(Y)} \approx 1 - \frac{3{,}2654 \text{ bit}}{3{,}2963 \text{ bit}} \approx 0{,}009374,
$$

Das relativ kleine Ausgabealphabet – es umfaßt 11 Kodewörter – komprimiert die Eingabe-Bitfolge X also schon beträchtlich, verglichen mit ihrer ursprünglichen Redundanz, die

$$\begin{aligned} R(X) &= 1 - \frac{H(X)}{L(X)} = 1 + \frac{\beta \cdot \log \beta + (1-\beta) \cdot \log(1-\beta)}{1 \text{ bit}} \\ &= 1 + \frac{85\% \cdot \log 85\% + 15\% \cdot \log 15\%}{\text{bit}} \approx 1 - \frac{0{,}6098 \text{ bit}}{\text{bit}} \approx 0{,}3902 \end{aligned}$$

beträgt, also ärgerliche 39%.

Vergleich von JPEG und JPEG2000

Wavelet-Kompression

Die Wavelet-Kompression ist eine verlustbehaftete Datenkompression speziell für Bilddaten (Video geht auch) z.B. JPEG2000.

- 2D-Wavelet-Transformation durchführen, dabei erhält man genausoviele Koeffizienten wie Pixel.
  Diese Koeffizienten sind einfacher zu komprimieren, weil sich die wichtigen Informationen auf wenige K. verteilen.
- Quantisieren
- Entropie-/Lauflängencodierung

Motivation

1D-Bild der Grösse 4:

$$\gamma_4 = [2, 6, 12, 4]$$

Motivation

1D-Bild der Grösse 4:

$$\gamma_4 = [2, 6, 12, 4]$$

Einfacher Vergröberungsschritt: Berechne Durchschnitt von je zwei benachbarten Pixeln.
Mit den Detailkoeffizienten kann das ursprüngliche Bild wiederhergestellt werden.

$$\gamma_2 = [4, 8], \delta_2 = [2, -4]$$

Motivation

1D-Bild der Grösse 4:

$$\gamma_4 = [2, 6, 12, 4]$$

Einfacher Vergröberungsschritt: Berechne Durchschnitt von je zwei benachbarten Pixeln.
Mit den Detailkoeffizienten kann das ursprüngliche Bild wiederhergestellt werden.

$$\gamma_2 = [4, 8], \delta_2 = [2, -4]$$

$$\gamma_1 = [6], \delta_1 = [2], \delta_2 = [2, -4]$$

Die Wavelet-Transformierte des Bildes ist der Gesamtdurchschnitt des Bildes mit den Detailkoeffizienten in aufsteigender Reihenfolge.

$$[6, 2, 2, -4]$$

Wavelet-Transformation

Idee: Vergöbere das Bild sukzessive und speichere Detailkoeffizienten.
Betrachte ein Bild nicht als Liste von Pixeln, sondern als abschnittsweise konstante Funktion auf $[0, 1)$.
Die Bilder haben die Grösse $2^j, j \geq 0$ Beispiel: TODO

Definition: V_j

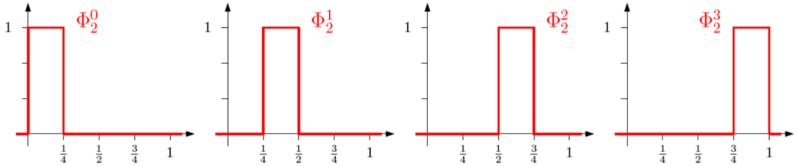
V_j ist der Vektorraum aller abschnittsweise konstanten Funktionen auf $[0,1)$ mit 2^j gleich grossen Abschnitten.

$\Rightarrow$ Jedes Bild der Grösse 2^j ist ein Vektor aus V_j.
Weil für alle j die Funktion (Vektoren) auf $[0,1)$ definiert sind, ist $V_j \subseteq V_{j+1}$.

Die Standardbasis (skalierte Translate) für V_j besteht aus

$$\Phi_j^i(x) = \Phi(2^j x - i) \text{ mit } \Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Basisvektoren der Haar-Basis für $j = 2$



Alle Bilder der Grösse $2^j = 4$ lassen sich aus Linearkombinationen dieser Basis darstellen.

Zusammen mit dem Skalarprodukt $< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ ist V_j ein euklidischer Vektorraum.

Zusammen mit dem Skalarprodukt $< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ ist V_j ein euklidischer Vektorraum.

Weil V_j Untervektorraum von V_{j+1} ist, hat V_j einen orthogonalen Komplementärraum W_j bezüglich dem SKP $< \cdot, \cdot >$ und es gilt $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$.

Zusammen mit dem Skalarprodukt $< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ ist V_j ein euklidischer Vektorraum.

Weil V_j Untervektorraum von V_{j+1} ist, hat V_j einen orthogonalen Komplementärraum W_j bezüglich dem SKP $< \cdot, \cdot >$ und es gilt $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$.

Nun sieht man, dass man ein Bild aus V_{j+1} als ein Bild aus V_j und einem Anteil aus W_j darstellen kann.

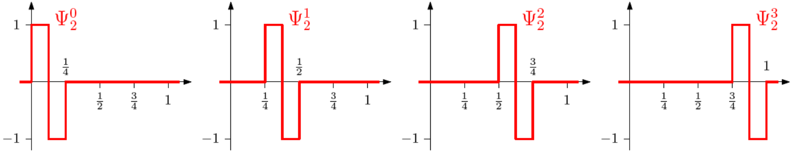
Die Basisfunktionen aus W_j heissen **Wavelets**.

Haar-Wavelets

Die Haar-Wavelets sind die zur Haar-Basis korrespondierenden Basisfunktionen von W_j.

$$\Psi_j^i = \Psi(2^j x - i) \text{ mit } \Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{falls } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Haar-Wavelets von W_2 zur Haar-Basis des V_j



Weil nach Definition $V_j \perp W_j$ gilt: $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$

Ein Bild f der Grösse $2^j = n$ kann man nun wie folgt darstellen:
$f = \sum_i c_n^i \cdot \Phi_n^i$
$f = c_o \cdot \Phi + \sum_i d_1^i \cdot \Psi_1^i + \cdots + \sum_i d_{n_1}^i \cdot \Psi_{n-1}^i$
mit
$c_k^i = 1/2 c_{k+1}^{2i} + 1/2 c_{k+1}^{2i+1}$
$d_k^i = 1/2 c_{k+1}^{2i} - 1/2 c_{k+1}^{2i+1}$

Beispiel:
$f = 3\Phi_2^0 + 1\Phi_2^1 + 3\Phi_2^2 + 5\Phi_2^3 \in V_2$
$f = (2\Phi_1^0 + 4\Phi_1^1) + (1\Psi_1^0 - 1\Psi_1^1)$
$f = (3\Phi_0^1) - (1\Psi_0^1) + (1\Psi_1^0 - 1\Psi_1^1)$

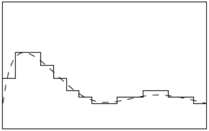
Quantisierung

- Normiere Basisfunktionen:
  $\Phi_k^i \rightsquigarrow 2^{k/2}\Phi_k^i$
  $\Psi_k^i \rightsquigarrow 2^{k/2}\Psi_k^i$

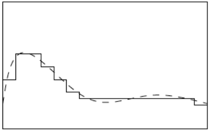
Quantisierung

- Normiere Basisfunktionen:
  $\Phi_k^i \rightsquigarrow 2^{k/2}\Phi_k^i$
  $\Psi_k^i \rightsquigarrow 2^{k/2}\Psi_k^i$
- Setze die kleinsten Koeffizienten nach der L_2-Norm auf Null.

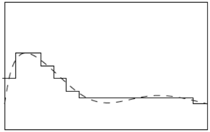
Wavelet-Kompression



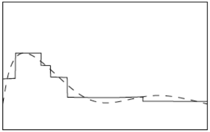
12 von 12 Koeffizienten



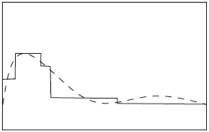
10 von 12 Koeffizienten



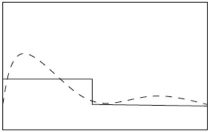
8 von 12 Koeffizienten



6 von 12 Koeffizienten



4 von 12 Koeffizienten



2 von 12 Koeffizienten

Aufgabe

Gegeben: die Standard Haar-Grundfunktion $\Phi(x)$

a) Ersetze das Haar-Wavelet durch die Funktion $\Psi(x) = \Phi(2x)$ und gib eine Zerlegungsgleichung und die Zweiskalen-Relation an.

Aufgabe

Gegeben: die Standard Haar-Grundfunktion $\Phi(x)$

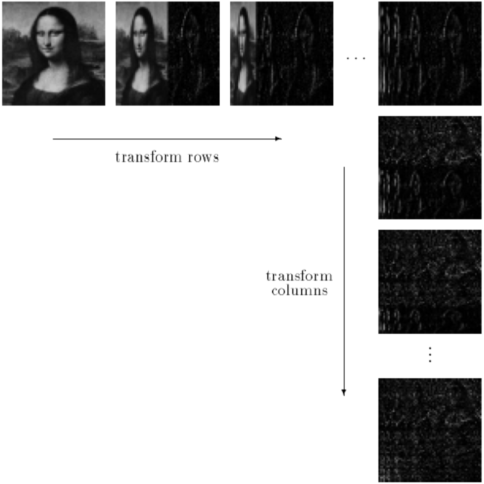
a) Ersetze das Haar-Wavelet durch die Funktion $\Psi(x) = \Phi(2x)$ und gib eine Zerlegungsgleichung und die Zweiskalen-Relation an.

b) Sei $V_1 = span\{\Phi(3x), \Phi(3x-1), \Phi(3x-2)\}$ und $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt. Gib dazu orthogonale Wavelets an, die das orthogonale Komplement W_0 von $V_0 = span\{\Phi(x)\}$ in V_1 aufspannen. (Es gilt also $V_1 = V_0 \oplus W_0$.)

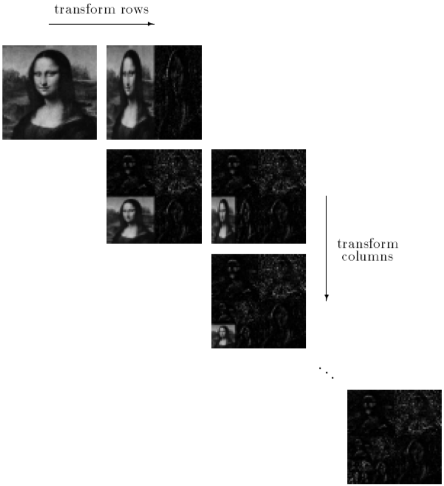
Und jetzt das ganze bivariat...

- Standard-Zerlegung
- Nicht-Standard-Zerlegung

Standard-Zerlegung



Nicht-Standard-Zerlegung



Lesen!

Wavelets for computer graphics: A primer

`http://www.cis.udel.edu/~amer/CISC651/wavelets_for_computer_graphics_Stollnitz.pdf`

Quellen

Pajor - Informatik 4 Tutorium SS2007

Prautzsch - Skript Informatik 4 SS2008

Wavelets for computer graphics: A primer
http://www.cis.udel.edu/~amer/CISC651/wavelets_for_computer_graphics_Stollnitz.pdf

Wikipedia

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 11 besprochen

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 11 besprochen
- Theorie der Haar-Wavelets verstanden

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt 11 besprochen
- Theorie der Haar-Wavelets verstanden
- Anwendung von Wavelets

Noch Fragen?

Vorschau

Vorschau

- Wiederholung
  Bitte konkrete Themen zur Wiederholung aus Kapitel 6-14 an mich per Email schicken.
  Themen aus Kapitel 1-5 wurden auf die Hausaufgabenklausur schon wiederholt.

Bis zum letzten Mal