



Informatik IV - Tutorium XII & XIII (SR -120)

Tut Nr. 1 – lineare und quadratische Optimierung

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Informatik
IBDS Prautzsch

30. April 2008



Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825



Inhaltsverzeichnis

1 Auftakt



Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele



Inhaltsverzeichnis

1 Auftakt

2 Lernziele

3 Themen

Simplex-Verfahren geometrisch

Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Gradientenverfahren und Levenberg-Marquardt-Algorithmus



Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele
- 3 Themen
 - Simplex-Verfahren geometrisch
 - Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1
 - Gradientenverfahren und Levenberg-Marquardt-Algorithmus
- 4 Abspann



Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

<https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/>

Tutorium 12: Donnerstags 8:00 Uhr - Raum -120

Tutorium 13: Donnerstags 9:45 Uhr - Raum -120

Übungsblattabgabe Donnerstag.



Schein / Übungsblätter

Nur die mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.

Diese werden korrigiert und bewertet.

66% der Punkte aller mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.



Schein / Übungsblätter

Nur die mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.

Diese werden korrigiert und bewertet.

66% der Punkte aller mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben aller Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.



Schein / Übungsblätter

Nur die mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.
Diese werden korrigiert und bewertet.

66% der Punkte aller mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben aller
Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!



Schein / Übungsblätter

Nur die mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben sind abzugeben.
Diese werden korrigiert und bewertet.

66% der Punkte aller mit **(K)** gekennzeichneten Aufgaben aller
Übungsblätter sind notwendig, um einen Schein zu erhalten.

Abgabe meistens Donnerstags.

Abgabe in Zweiergruppe erlaubt und ausdrücklich erwünscht!

Um das Übungsteam zu unterstützen bitte folgendes Deckblatt
verwenden:

`http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~unbdh/deckblatt/
index.php?course=5`



Literatur

Boehm, Prautzsch: Numerical Methods. AK Peters 1993. ISBN 3-528-06350-5

http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=7319953&nd=3204657

Ash: Information Theory. Dover 1990. ISBN 0-486-66521-6

http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&nd=9866904

Goos: Vorlesungen über Informatik. Bd. 4, Springer 1998. ISBN 3-540-60650-5

http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/hylib-bin/suche.cgi?opacdb=UBKA_OPAC&fbt=9316367&nd=6568301



Was wollen wir heute erreichen?



Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen



Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen
- und die Tableaumethode dazu verstehen



Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen
- und die Tableaumethode dazu verstehen
- Gradientenverfahren anwenden können



Was wollen wir heute erreichen?

- Simplex-Verfahren veranschaulichen
- und die Tableaumethode dazu verstehen
- Gradientenverfahren anwenden können
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus anwenden können



Optimierung linearer Funktionen



Simplex-Verfahren

Das Simplex-Verfahren ist ein Optimierungsverfahren der Numerik zur Lösung **linearer Optimierungsprobleme**. Es löst ein solches Problem nach endlich vielen Schritten exakt oder stellt dessen Unlösbarkeit oder Unbeschränktheit fest. Die Grundidee des Simplex-Verfahrens wurde 1947 von George Dantzig vorgestellt. Seitdem hat es sich durch zahlreiche Verbesserungen zum wichtigsten Lösungsverfahren der linearen Optimierung in der Praxis entwickelt.



Algorithm 1 SIMPLEXGEOM

Eingabe: Lineares Programm (A, c, b) in Standardform

Ausgabe: Optimale Lösung x des LPs

$P \leftarrow$ konvexes Lösungspolyeder zu (A, c, b)

$x \leftarrow$ beliebige Ecke in P

solange *es gibt verbessernde Kante* $(x, y) \in P$ **tue**
 $x \leftarrow y$

Ende

return x



Algorithm 2 SIMPLEXGEOM

Eingabe: Lineares Programm (A, c, b) in Standardform

Ausgabe: Optimale Lösung x des LPs

$P \leftarrow$ konvexes Lösungspolyeder zu (A, c, b)

$x \leftarrow$ beliebige Ecke in P

solange es gibt verbessernde Kante $(x, y) \in P$ **tue**
 $x \leftarrow y$

Ende

return x

\rightsquigarrow Wir bewegen uns über die Kanten des Polyeders von Ecke zu Ecke, bis wir eine optimale Ecke x gefunden haben.



Rohöl soll durch ein chemisches Verfahren in Komponenten zerlegt werden:

- schweres Öl S
- mittelschweres Öl M
- leichtes Öl L



Rohöl soll durch ein chemisches Verfahren in Komponenten zerlegt werden:

- schweres Öl S
- mittelschweres Öl M
- leichtes Öl L

Folgende Verfahren stehen zur Verfügung:

10 Einheiten Rohöl ergeben:

- 2 Einheiten S
- 2 Einheiten M
- 1 Einheit L

Kosten: 3

10 Einheiten Rohöl ergeben:

- 1 Einheit S
- 2 Einheiten M
- 4 Einheiten L

Kosten: 5



Aufgabe

Ein Kunde möchte nun

- 3 Einheiten S
- 5 Einheiten M
- 4 Einheiten L

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm



Aufgabe

Ein Kunde möchte nun

- 3 Einheiten S
- 5 Einheiten M
- 4 Einheiten L

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

- Formulieren Sie das Problem als lineares Programm
- Bringen Sie das lineare Programm in Standardform



Aufgabe

Ein Kunde möchte nun

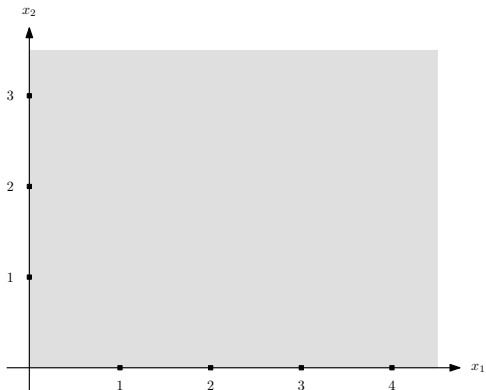
- 3 Einheiten S
- 5 Einheiten M
- 4 Einheiten L

Sie sollen diesen Auftrag unter Anwendung der beiden Verfahren so kostengünstig wie möglich erfüllen.

- Formulieren Sie das Problem als lineares Programm
- Bringen Sie das lineare Programm in Standardform
- Lösen Sie das LP mit Hilfe des geometrischen Simplexverfahrens

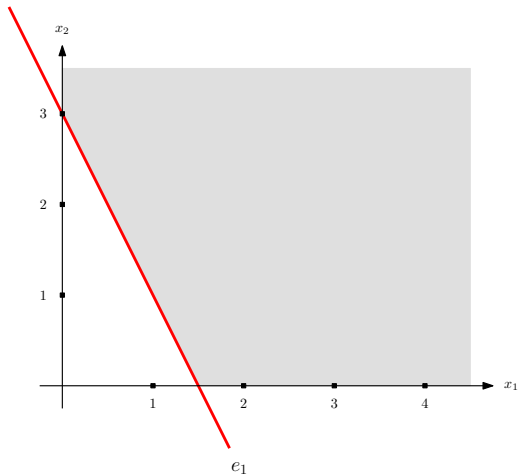


Simplex-Verfahren



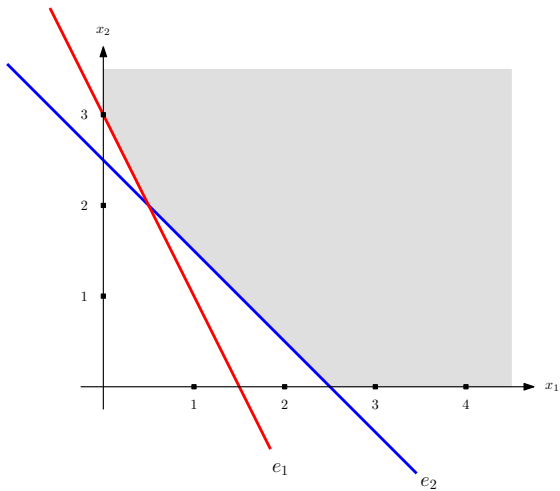


Simplex-Verfahren



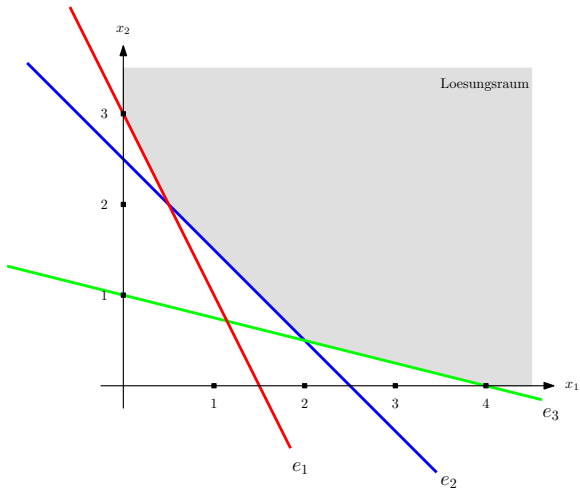


Simplex-Verfahren





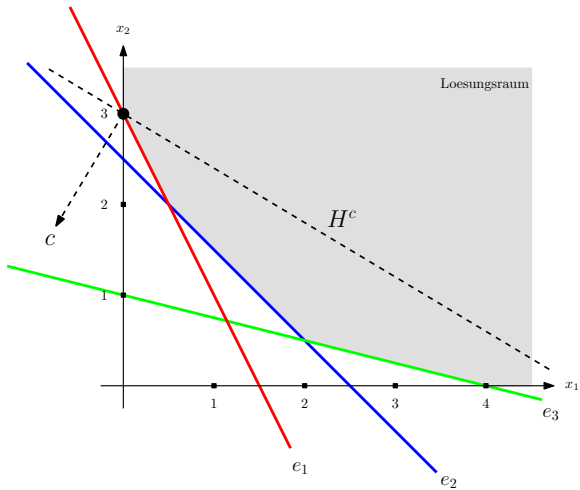
Simplex-Verfahren





Simplex-Verfahren geometrisch

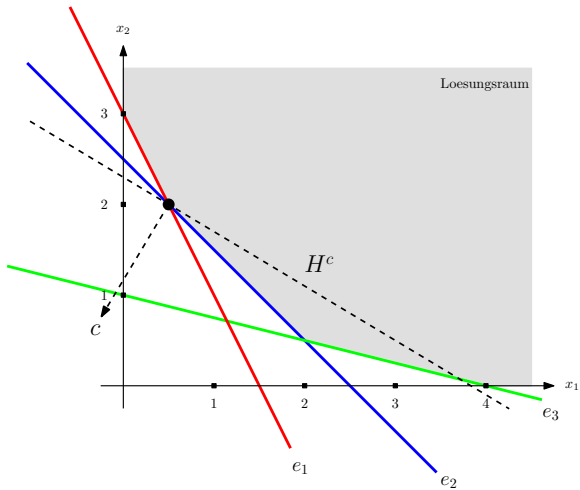
Simplex-Verfahren





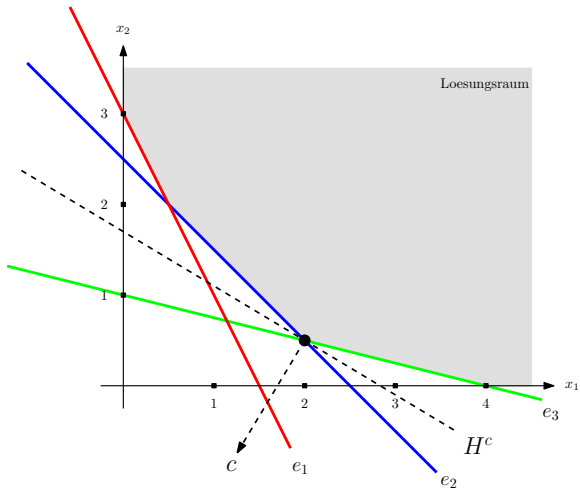
Simplex-Verfahren geometrisch

Simplex-Verfahren



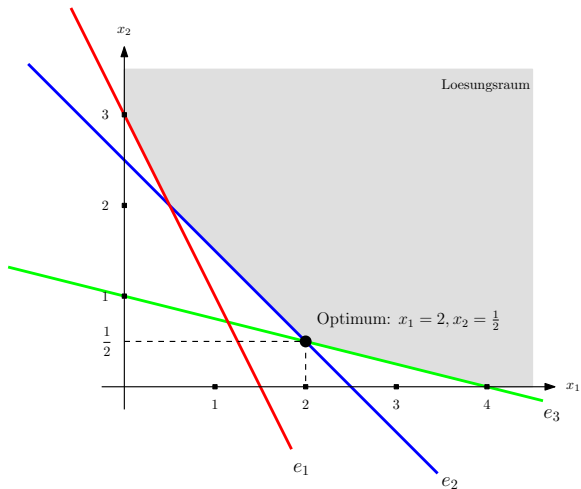


Simplex-Verfahren





Simplex-Verfahren





Aufgabe 4

Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & = & \max \\ x_2 & - & x_1 & \leq & 2 \\ x_2 & & & \leq & 3 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

Lösen Sie das lineare Programm

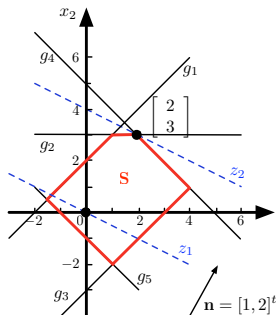
- 1 graphisch,
- 2 indem Sie zunächst x_1 und x_2 eliminieren und anschließend das Simplexverfahren anwenden.

Hinweis: $\bar{x} = [0, 0]^t$ ist zulässiger Punkt.



Aufgabe 4

a) Wie in der Abbildung zu sehen ist, wächst die Konstante c bei der Geraden $\{x_1 + 2x_2 = c\}$ in Richtung \vec{n} .



$$\begin{aligned}
 g_1 &: x_2 - x_1 = 2 \\
 g_2 &: x_2 = 3 \\
 g_3 &: x_1 - x_2 = 3 \\
 g_4 &: x_1 + x_2 = 5 \\
 g_5 &: x_1 + x_2 = -1 \\
 z_1 &: x_1 + 2x_2 = 0 \\
 z_2 &: x_1 + 2x_2 = 8
 \end{aligned}$$

Daher ergibt sich der optimale Wert 8 mit der Lösung $[x_1, x_2]^t = [2, 3]^t$.



b) Das lineare Programm kann kurz geschrieben werden durch

$$\begin{array}{l}
 \text{(LP1)} \\
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 z
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 & x_1 & x_2 & 1 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 2 \\
 & 0 & -1 & 3 \\
 & -1 & 1 & 3 \\
 & -1 & -1 & 5 \\
 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \geq \mathbf{0} \\
 \\
 \\
 = \max
 \end{array}$$



b) Das lineare Programm kann kurz geschrieben werden durch

$$\begin{array}{l}
 \text{(LP1)} \\
 \begin{array}{ccc|c}
 & x_1 & x_2 & 1 \\
 y_1 & 1 & -1 & 2 \\
 y_2 & 0 & -1 & 3 \\
 y_3 & -1 & 1 & 3 \\
 y_4 & -1 & -1 & 5 \\
 y_5 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 z & 1 & 2 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \geq 0 \\
 \\
 \\
 = \max
 \end{array}$$

1. Schritt: Überführung in Normalform:

1) Da der Ursprung $[0, 0]^t$ bereits ein zulässiger Punkt ist, müssen wir die Koordinatentransformation $\vec{x} = \vec{x}' + [0, 0]^t$ nicht durchführen.



Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

2) Wir tauschen $x_s, s = 1, 2$, gegen geeignete y_r und erhalten (LP2) und (LP3), wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

(LP1)

| | x_1 | x_2 | 1 | $a_i/a_{i,s}$ | $a_j/a_{j,s}$ |
|-------|-------|-------|---|---------------|---------------|
| y_1 | 1 | -1 | 2 | 2 | |
| y_2 | 0 | -1 | 3 | | |
| y_3 | -1 | 1 | 3 | | |
| y_4 | -1 | -1 | 5 | | |
| y_5 | 1 | 1 | 1 | | |
| z | 1 | 2 | 0 | | |

▲
 $s = 1$

-3
-5
-1
 $x_1 \leftrightarrow y_3$
○ Pivot

(LP2)

| | $y_3 \geq 0$ | x_2 | 1 | $a_i/a_{i,s}$ | $a_j/a_{j,s}$ |
|-------|--------------|-------|---|---------------|---------------|
| y_1 | -1 | 0 | 5 | | -3 |
| y_2 | 0 | -1 | 3 | | |
| x_1 | -1 | 1 | 3 | | |
| y_4 | 1 | -2 | 2 | | |
| y_5 | -1 | 2 | 4 | | |
| z | -1 | 3 | 3 | | |

▲
 $s = 2$

-1
-2
2
 $x_2 \leftrightarrow y_4$
○ Pivot

(LP3)

| | $y_3 \geq 0$ | $y_4 \geq 0$ | 1 |
|-------|--------------|--------------|---|
| y_1 | -1 | 0 | 5 |
| y_2 | -1/2 | 1/2 | 2 |
| x_1 | -1/2 | -1/2 | 4 |
| x_2 | 1/2 | -1/2 | 1 |
| y_5 | 0 | -1 | 6 |
| z | 1/2 | -3/2 | 6 |

(LP4)

| | $y_3 \geq 0$ | $y_4 \geq 0$ | 1 |
|-------|--------------|--------------|---|
| y_1 | -1 | 0 | 5 |
| y_2 | -1/2 | 1/2 | 2 |
| y_5 | 0 | -1 | 6 |
| z | 1/2 | -3/2 | 6 |

$x_1 = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 4$

$x_2 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 1$



Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

2) Wir tauschen $x_s, s = 1, 2$, gegen geeignete y_r und erhalten (LP2) und (LP3), wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

(LP1)

| | x_1 | x_2 | 1 | $a_i/a_{i,s}$ | $a_j/a_{j,s}$ |
|-------|-------|-------|---|---------------|---------------|
| y_1 | 1 | -1 | 2 | | 2 |
| y_2 | 0 | -1 | 3 | | |
| y_3 | -1 | 1 | 3 | | -3 |
| y_4 | -1 | -1 | 5 | | -5 |
| y_5 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| z | 1 | 2 | 0 | | |

▲
 $s = 1$

$x_1 \leftrightarrow y_3$
○ Pivot

(LP2)

| | $y_3 \geq 0$ | x_2 | 1 | $a_i/a_{i,s}$ | $a_j/a_{j,s}$ |
|-------|--------------|-------|---|---------------|---------------|
| y_1 | -1 | 0 | 5 | | -3 |
| y_2 | 0 | -1 | 3 | | |
| x_1 | -1 | 1 | 3 | | 1 |
| y_4 | 1 | -2 | 2 | | 2 |
| y_5 | -1 | 2 | 4 | | 2 |
| z | -1 | 3 | 3 | | |

▲
 $s = 2$

$x_2 \leftrightarrow y_4$
○ Pivot

(LP3)

| | $y_3 \geq 0$ | $y_4 \geq 0$ | 1 |
|-------|--------------|--------------|---|
| y_1 | -1 | 0 | 5 |
| y_2 | -1/2 | 1/2 | 2 |
| x_1 | -1/2 | -1/2 | 4 |
| x_2 | 1/2 | -1/2 | 1 |
| y_5 | 0 | -1 | 6 |
| z | 1/2 | -3/2 | 6 |

(LP4)

| | $y_3 \geq 0$ | $y_4 \geq 0$ | 1 |
|-------|--------------|--------------|---|
| y_1 | -1 | 0 | 5 |
| y_2 | -1/2 | 1/2 | 2 |
| y_5 | 0 | -1 | 6 |
| z | 1/2 | -3/2 | 6 |

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 4$$

$$x_2 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 1$$

3) Nach Elimination von x_1 und x_2 bekommen wir die Normalform (LP4).



2. Schritt: Simplexverfahren: Für jedes $c_s > 0$ suchen wir ein Pivotelement in der Spalte s und führen einen Eckentausch durch. Nach einem Eckentausch bekommen wir (LP5).

| | | | | |
|-------|--------------|--------------|---|---------------|
| (LP4) | $y_3 \geq 0$ | $y_4 \geq 0$ | 1 | $a_j/a_{j,s}$ |
| y_1 | -1 | 0 | 5 | -5 |
| y_2 | -1/2 | 1/2 | 2 | -4 |
| y_5 | 0 | -1 | 6 | |
| z | 1/2 | -3/2 | 6 | |

▲
s

| | | | |
|-------|--------------|--------------|---|
| (LP5) | $y_2 \geq 0$ | $y_4 \geq 0$ | 1 |
| y_1 | 2 | -1 | 1 |
| y_3 | -2 | 1 | 4 |
| y_5 | 0 | -1 | 6 |
| z | -1 | -1 | 8 |

$y_3 \leftrightarrow y_2$
○ Pivot

Da alle c_s negativ sind, bekommen wir eine Lösung bei der Ecke mit $y_2 = 0$ und $y_4 = 0$. Die Lösung ist also

$$y_2 = y_4 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_3 = 4, \quad y_5 = 6$$

und

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 4 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 + 1 = 3.$$

Der maximale Wert beträgt 8.



Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Gerade

$$y(x) = a + bx,$$

für die

$$\max\{|y(0) - 2|, |y(1) - 1|, |y(2) - 4|\}$$

minimal ist.



Aufgabe 5

Sei

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} y(0) - 2 \\ y(1) - 1 \\ y(2) - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2 \\ a + b - 1 \\ a + 2b - 4 \end{bmatrix}.$$

Zur Bestimmung sind a und b , so dass

$$\|\vec{r}\|_{\infty} = \max\{|a - 2|, |a + b - 1|, |a + 2b - 4|\} = \min.$$



Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Sei $r = \|\vec{r}\|_\infty$ und seien $x_0 = 1/r$, $x_1 = a/r$, $x_2 = b/r$. Aus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \pm \frac{1}{r} \vec{r} = \pm \frac{1}{r} \begin{bmatrix} a - 2 \\ a + b - 1 \\ a + 2b - 4 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 - 2x_0 \\ x_1 + x_2 - x_0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_0 \end{bmatrix}$$

erhalten wir ein lineares Programm



Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Sei $r = \|\vec{r}\|_\infty$ und seien $x_0 = 1/r, x_1 = a/r, x_2 = b/r$. Aus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \pm \frac{1}{r} \vec{r} = \pm \frac{1}{r} \begin{bmatrix} a-2 \\ a+b-1 \\ a+2b-4 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} x_1 - 2x_0 \\ x_1 + x_2 - x_0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_0 \end{bmatrix}$$

erhalten wir ein lineares Programm

$$\begin{aligned} x_0 &= \max \\ x_1 - 2x_0 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_0 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_0 &\leq 1 \\ -(x_1 - 2x_0) &\leq 1 \\ -(x_1 + x_2 - x_0) &\leq 1 \\ -(x_1 + 2x_2 - 4x_0) &\leq 1 \end{aligned}$$



Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

(LP1)

| | x_0 | x_1 | x_2 | 1 | $\frac{a_i}{a_{i,s}}$ | $\frac{a_j}{a_{j,s}}$ |
|-------|-------|-------|-------|---|-----------------------|-----------------------|
| y_1 | 2 | -1 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | |
| y_2 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | |
| y_3 | 4 | -1 | -2 | 1 | $\frac{1}{4}$ | |
| y_4 | -2 | 1 | 0 | 1 | | $-\frac{1}{2}$ |
| y_5 | -1 | 1 | 1 | 1 | | -1 |
| y_6 | -4 | 1 | 2 | 1 | $\frac{1}{4}$ | |
| z | 1 | 0 | 0 | 0 | | |

▲
 $s = 1$

○ Pivot

(LP2)

| | y_6 | x_1 | x_2 | 1 | $\frac{a_i}{a_{i,s}}$ | $\frac{a_j}{a_{j,s}}$ |
|-------|----------------|----------------|----------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| y_1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | | -3 |
| y_2 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | | $-\frac{5}{3}$ |
| y_3 | -1 | 0 | 0 | 2 | | |
| y_4 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | $\frac{1}{3}$ | | 1 |
| y_5 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | | 1 |
| x_0 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | | |
| z | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | | |

▲
 $s = 2$

○ Pivot

(LP3)

| | y_6 | y_2 | x_2 | 1 | $\frac{a_i}{a_{i,s}}$ | $\frac{a_j}{a_{j,s}}$ |
|-------|----------------|----------------|----------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| y_1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| x_1 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | | -1 |
| y_3 | -1 | 0 | 0 | 2 | | |
| y_4 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | | |
| y_5 | 0 | -1 | 0 | 2 | | |
| x_0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | | |
| z | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | | |

▲
 $s = 3$

○ Pivot

(LP4)

| | y_6 | y_2 | y_4 | 1 |
|-------|----------------|----------------|----------------|---|
| y_1 | 0 | 0 | -1 | 2 |
| x_1 | $-\frac{1}{2}$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| y_3 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| x_2 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | 1 |
| y_5 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| x_0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 1 |
| z | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 1 |

○ Pivot

(LP5)

| | y_6 | y_2 | y_4 | 1 |
|-------|----------------|----------------|----------------|---|
| y_1 | 0 | 0 | -1 | 2 |
| y_3 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| y_5 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| z | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 1 |

○ Pivot

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_6 - y_2 + \frac{1}{2}y_4 + 1$$

$$x_2 = \frac{1}{4}y_6 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{4}y_4 + 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{4}y_6 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{4}y_4 + 1$$



Simplex-Verfahren mit Tableau bzw. Übungsblatt 1

Wir führen (LP1) in Normalform über und erhalten (LP5), wobei der Ursprung $[x_0, x_1, x_2]^t = [0, 0, 0]^t$ schon ein zulässiger Punkt ist.

Da in (LP5) $\vec{c} = [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]^t < \vec{0}$ gilt, bekommen wir den maximalen Wert 1 mit Lösung

$$y_6 = y_2 = y_4 = 0$$

und

$$y_1 = 2, y_3 = 2, y_5 = 2, x_1 = 1, x_2 = 1, x_0 = 1$$

und

$$r = \frac{1}{x_0} = 1, a = r x_1 = 1, b = r x_2 = 1.$$

Die gesuchte Gerade ist

$$y(x) = 1 + x$$

und $\|\vec{r}\|_\infty = 1$.



Lektüreempfehlung

Unbedingt lesen! Wichtig für die Klausur. Hier wird quasi das Thema Simplex-Verfahren komplett abgehandelt:

<http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uxasq/info4tut7/mat/simplex.pdf>



Optimierung quadratischer Funktionen

Gradientenverfahren

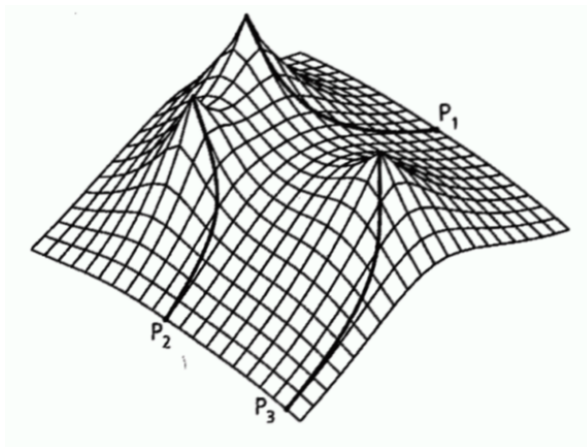


Gradientenverfahren

Das Verfahren des steilsten Abstiegs, auch Gradientenverfahren genannt, ist ein Verfahren, das in der Numerik eingesetzt wird, um **allgemeine Optimierungsprobleme** zu lösen. Dabei geht man (am Beispiel eines Minimierungsproblem) von einem Näherungswert aus. Von diesem schreitet man in Richtung des Gradienten (der die Richtung des steilsten Abstiegs von diesem Näherungswert angibt) fort, bis man keine numerische Verbesserung mehr erzielt. Das Verfahren konvergiert oftmals sehr langsam, da es sich dem Optimum entweder mit einem starken Zick-Zack-Kurs nähert oder der Betrag des Gradienten in der Nähe des Optimums sehr klein ist, wodurch die Länge der Iterationsschritte dann ebenfalls sehr klein ist.



Gradientenverfahren mit verschiedenen Startwerten





Definition: Gradientenverfahren

$x_{i+1} = x_i - h \cdot \nabla J(x_i)$ mit Schrittweite h und Funktion $J(x)$.



Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einer Kreisscheibe mit Radius r sollen n Punkte $p_i = (x_i, y_i)$ möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- a) Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion $c(q)$, die für gute Konfigurationen q minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.



Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einer Kreisscheibe mit Radius r sollen n Punkte $p_i = (x_i, y_i)$ möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- a) Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion $c(q)$, die für gute Konfigurationen q minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.
- b) Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration q eine neue Konfiguration q' ?



Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einer Kreisscheibe mit Radius r sollen n Punkte $p_i = (x_i, y_i)$ möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion $c(q)$, die für gute Konfigurationen q minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.
- Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration q eine neue Konfiguration q' ?
- Wie könnte eine initiale Konfiguration aussehen?



Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einer Kreisscheibe mit Radius r sollen n Punkte $p_i = (x_i, y_i)$ möglichst gleichmässig verteilt werden. Hierzu soll ein iteratives Optimierungsverfahren eingesetzt werden.

- Skizzieren Sie eine Bewertungsfunktion $c(q)$, die für gute Konfigurationen q minimale Werte liefert. Erläutern Sie Ihren Entwurf.
- Welches Optimierungsverfahren würden Sie wählen? Genauer: Wie erzeugen Sie aus einer Konfiguration q eine neue Konfiguration q' ?
- Wie könnte eine initiale Konfiguration aussehen?
- Brauchen Sie auch einen Straffunktion $l(q)$? Wenn ja: welche und wozu? Wenn nein: warum nicht?



Lösungsskizze

Eine Konfiguration q in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten (p_1, \dots, p_n) . Ein Übergang von einer Konfiguration q in eine Konfiguration q' entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

a) $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$ wobei $i \neq j$



Lösungsskizze

Eine Konfiguration q in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten (p_1, \dots, p_n) . Ein Übergang von einer Konfiguration q in eine Konfiguration q' entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

- a) $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$ wobei $i \neq j$
- b) Gradientenabstiegsverfahren. $q' := q - (\nabla c)(q) \cdot h$



Lösungsskizze

Eine Konfiguration q in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten (p_1, \dots, p_n) . Ein Übergang von einer Konfiguration q in eine Konfiguration q' entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

- a) $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$ wobei $i \neq j$
- b) Gradientenabstiegsverfahren. $q' := q - (\nabla c)(q) \cdot h$
- c) Zufällige Anordnung der Punkte.



Lösungsskizze

Eine Konfiguration q in unserem Optimierungsproblem entspricht gerade einer Menge von Punkten (p_1, \dots, p_n) . Ein Übergang von einer Konfiguration q in eine Konfiguration q' entspricht also dem Neusetzen der Koordinaten der jeweiligen Punkte.

- $c(q) = c(p_1, \dots, p_n) := -\min |p_i - p_j|$ wobei $i \neq j$
- Gradientenabstiegsverfahren. $q' := q - (\nabla c)(q) \cdot h$
- Zufällige Anordnung der Punkte.
- Ja. $l(q) = l(p_1, \dots, p_n) := \sum_{i=1}^n k \cdot \max\{r, |p_i|\}$



Lektüreempfehlung

Goos, Vorlesungen über Informatik Band 4
Kapitel 22.1



Optimierung quadratischer Funktionen

Levenberg-Marquardt-Algorithmus



Definition: Levenberg-Marquardt-Algorithmus

Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus löst ein **allgemeine Optimierungsprobleme** iterativ und bestimmt in jedem Iterationsschritt zu einer Näherungslösung x_0 eine nächste $x_1 = x_0 + \vec{v}$.

Das Verfahren setzt sich aus der Gauss-Newton-Methode und dem Gradientenabstieg zusammen.

Durch einfache mathematische Umformungen kommt man dann auf die Gleichung: $(J^t J + \mu E) \vec{v} = J^t (\vec{p} - \vec{f}_0)$ mit Dämpfungsfaktor μ .

Für grosse μ verhält sich das Verfahren wie ein Gradientenabstiegsverfahren, das langsam aber sicher ist. Für kleine μ verhält sich das Verfahren wie ein Gauss-Newton Verfahren mit schnellerer, quadratischer Konvergenz.



Aufgabe

Gegeben seien die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x & 2y \\ y & -2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = (1, 2, 2)^t.$$

Gesucht ist ein \vec{x} , das den Term $\|f(\vec{x}) - \vec{p}\|^2$ minimiert.

Berechne zum Startwert $x_0 = (1, 1)^t$ die nächsten zwei Näherungslösungen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 mit insgesamt zwei Schritten des Levenberg-Marquardt-Algorithmus, wenn $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 1$.



Lektüreempfehlung

`http://www.ics.forth.gr/%7Elourakis/levmar/levmar.pdf`



Quellen

Pajor - Informatik 4 Tutorium SS2007

Prautzsch - Skript Informatik 4 SS2008

Goos, Vorlesungen über Informatik Band 4

Wikipedia



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch
- Simplex-Verfahren mit Tableau



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch
- Simplex-Verfahren mit Tableau
- Gradientenabstieg



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Organisatorische Details
- Simplex-Verfahren geometrisch
- Simplex-Verfahren mit Tableau
- Gradientenabstieg
- Levenberg-Marquardt Algorithmus



Noch Fragen?



Vorschau



Vorschau

- Zufallsgesteuerte Optimierung



Vorschau

- Zufallsgesteuerte Optimierung
- Neuronale Netze



Bis zum nächsten Mal

