# Aufgabenblatt 3

1. Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b\}^* |$ w enthält gleich viele a‘s wie b‘s$\}$
   (a) Wie lautet das Pumping Lemma ? Was sollte man zeigen, falls man das Pumping Lemma wiederlegen will.
   (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.
   (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache $\mathcal{L}' = \{a^p | p\ Primzahl\}$ nicht regulär ist.
   (d) Sei nun eine Sprache $\mathcal{L}'' = \{a, aab, aaab\}$ ist diese regulär, falls ja geben Sie einen endlichen Automaten an, der diese Sprache akzeptiert. Kann man mit dem Pumping Lemma zeigen, dass die Sprache regulär ist?

2. Gegeben sei die folgende Grammatik: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Pi)$
   $\mathcal{V} := \{S, A, M, D\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,
   $\Pi := \{$
   $\mathcal{S} \rightarrow AMD|M$
   $A \rightarrow AA|a$
   $D \rightarrow DD|d$
   $M \rightarrow bMc|\lambda$
   $\}$
   (a) Geben Sie die erzeugte Sprache an.

   ***Hinweis:*** *Bitte je nach Wunsch der Gruppen rechnen, da die Aufgaben (ab b) Teil) erst nächste Woche drankommen werden.*
   (b) Wandeln Sie die gegebene kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}$ in eine äquivalente kontextfreie Grammatik $\mathcal{G}^{‘}$ in Chomsky-Normalform um, indem sie jeden Schritt durch eine neue Grammatik beschreiben.
   (c) Geben Sie zwei verschiedene kontextfreie Ableitung des Wortes *aabbccdd* aus der Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ an.
   (d) Geben Sie den Syntaxbaum oder wenn möglich Syntaxbäume in der Teilaufgabe c) gegebenen Sprache an. Wie nennt man es, wenn man ein Wort aus der Sprache mit verschiedenen Syntaxbäumen beschreiben kann?

3. Die allgemeiner Kellerautomat (PDA) ist ein Tupel $M := (\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{Q}, \delta, q_0, S)$, wobei

   - $\mathcal{A}$ das Eingabealphabet
   - $\mathcal{K}$ das Kelleralphabet
   - $\mathcal{Q}$ die endliche Menge der Zustände
   - $\delta : \mathcal{A}_\varepsilon \text{ x } \mathcal{Q} \text{ x } \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_e(\mathcal{Q} \text{ x } \mathcal{K}^*)$, wobei $\mathcal{P}_e$ die Potenzmenge ist.
   - $S$ das unterste Kellerzeichen

   Gegeben sei der folgende Kellerautomat $M := (\{a, b\}, \{A, B, S\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta, q_0, S)$

$$
\begin{array}{llcl}
\delta : & (b, q_0, S) & \mapsto & (q_0, BS) \\
 & (b, q_0, B) & \mapsto & (q_0, BB) \\
 & (a, q_0, B) & \mapsto & (q_1, B) \\
 & (a, q_1, B) & \mapsto & (q_2, B) \\
 & (a, q_0, B) & \mapsto & (q_0, AB) \\
 & (a, q_0, A) & \mapsto & (q_2, \lambda) \\
 & (b, q_2, B) & \mapsto & (q_3, B) \\
 & (b, q_3, B) & \mapsto & (q_2, \lambda) \\
 & (\lambda, q_2, S) & \mapsto & (q_2, \lambda)
\end{array}
$$

   Welche Sprache $L$ akzeptiert der Kellerautomat $M$?

4. Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \{0^{2^n} : n \geq 1\}$. Zeigen Sie durch das Pumping-Lemma, dass die Sprache nicht kontextfrei ist. (Eventuell kann man zuerst die Tutanten fragen, zu welchem Typ von Chomsky diese Sprache gehört.)

5. Geben Sie für die Sprache $\mathcal{L} = \{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$ die Chomsky-Normalform und den dazugehörigen Automaten formal an.

# Lösungen

1. (a) Das Pumping Lemma:
Sei M ein deterministischer endlicher Akzeptor mit n Zuständen und das Wort $\omega \in \mathcal{L}(M)$ mit $|\omega| \geq n$ sei beliebig. Dann existiert eine Zerlegung für $\omega$ mit $\omega = \alpha\beta\gamma$ wobei :

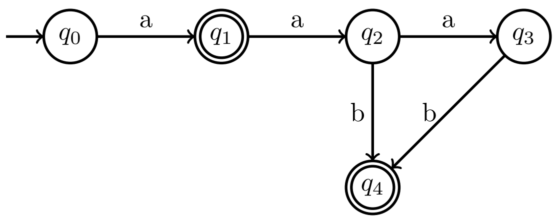
    i. $\beta \neq \lambda$
    ii. $|\alpha\beta| \leq n$
    iii. $\alpha\beta^*\gamma \subset \mathcal{L}(M)$, d. h. $\alpha\beta^i\gamma \in \mathcal{L}$ mit $i \geq 0$

    gelten.
    Falls man das Pumping Lemma wiederlegen will, muß man bei einem beliebigen (frei wählbaren) Wort zeigen, dass **jede mögliche** Zerlegung von $\omega$ eine der drei Bedingungen nicht erfüllt.

   (b) z. z: $\mathcal{L}$ regulär $\Longleftrightarrow$ Es existiert ein deterministischer endlicher Akzeptor mit n Zuständen.
Ann.: Es gibt kein solches $n \in \mathbb{N}$ , also es gibt keinen deterministischen endlichen Akzeptor
Dann ist ein Wort zu finden, für das es keine mögliche Zerlegung gibt, so dass (i), (ii) und (iii) gelten.
1. Versuch:
Wähle das Wort $(ab)^n$ aus $\mathcal{L}$. Sei nun die Zerlegung von $\omega$ mit $\beta$ aus gleich vielen a's wie b's, aber mindestens aus ab besteht, wegen (i). Sei (ii) auch erfüllt. Dann ist (iii) auch erfüllt, da die Anzahl der a's un b's in $\alpha\gamma$ gleich sind, da sie in $\beta$ und $\omega = \alpha\beta\gamma$ ja auch gleich sind. Da sich die Anzahl der a's und b's in $\beta$ nur vervielfach aber immer noch gleich bleiben ist auch (iii) erfüllt. Also ist eine mögliche Zerlegung gefunden, d. h. man muß ein anders Wort wählen.
2. Versuch:
Wähle das Wort $a^nb^n$ aus $\mathcal{L}$. Dann liegt $\alpha\beta$ ganz in den a's wegen (ii) aber es besteht aus mindestens aus einem a wegen (i). Also sollte dann $a^{n+i}b^n$ in $\mathcal{L}$ liegen. Tut es aber nicht. Das ist ein Wiederspruch zur Annahme. Also folgt das $\mathcal{L}$ nicht regulär ist.

   (c) Gleiche Annahme wie in b). Wähle das Wort $\omega = aa$ dann ist $\beta \in \{a, aa\}$, da wegen (i) ist $\beta$ nicht $\lambda$ und wegen (ii) ist $|\alpha\beta| \leq n = 2$. Falls $\beta = a$ ist, dann sollte wegen (iii) $\alpha\beta^i\gamma = a^{i+1} \in L$ sein, aber falls i+1 eine ungerade Primzahl ist, funktioniert es mit i+2 schon nicht mehr, da diese durch zwei teilbar ist. Falls $\beta = aa$ ist, sollte $\alpha\beta^i\gamma = a^{2*i} \in \mathcal{L}$ sein, da ist es noch offensichtlicher, dass nur bei $i = 1$ die Zahl $2 * i$ eine Primzahl ist. Also ist $\mathcal{L}'$ nicht regulär.

   (d) Follgender endlicher Automat akzeptiert $\mathcal{L}''$:



Nein, da man mit dem Pumping Lemma nur zeigen kann, dass eine Sprache nicht regulär ist.

2. (a) Die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \{a^m b^n c^n d^p : m, p \geq 1; n \geq 0\} \cup \{b^n c^n : n \geq 0\}$

   (b) Wir gehen in 3 Schritten vor und konstruieren zu $\mathcal{G}$ äquivalente Grammatiken $\mathcal{G}_i = (\mathcal{V}_i, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Pi_i))(i = 1, 2, 3)$, die der Normalform immer näher kommen

   - Jedes Terminalzeichen a$\in \mathcal{A}$ wird durch ein Nichtterminalzeichen $A$ ersetzt und in den Produktionsmenge $\Pi$ in der Form $A \rightarrow a$ hinzugefügt. Die neue Grammatik sieht folgendermaßen aus:
     $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Pi_1)$
     $\mathcal{V}_1 := \{S, A, M, D\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,
     $\Pi_1 := \{$
     $\mathcal{S} \rightarrow AMD|M$
     $A \rightarrow AA|a$
     $D \rightarrow DD|d$
     $M \rightarrow BMC|\lambda$
     $B \rightarrow b$
     $C \rightarrow c$
     $\}$
   - Die neue Grammatik ist $\lambda$-frei, d.h. die Produktionsmenge neben der eventuellen $\lambda$-Regel $S \rightarrow \lambda$ nur Regeln der Form

     $$X \rightarrow YZ \ (X, Y, Z \in \mathcal{V})$$
     $$X \rightarrow a \ (X \in \mathcal{V}, a \in \mathcal{A})$$

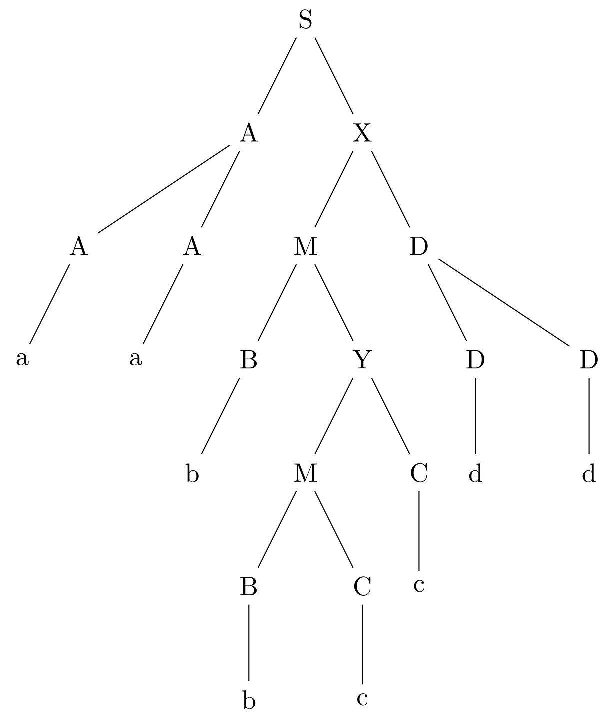
     besitzt.
     Wir erhalten hiermit $\mathcal{G}_2$ aus $\mathcal{G}_1$, indem alle Produktion wie $M \rightarrow \lambda$ an allen Produktionen, in denen rechts $M$ abgeleitet wurde, wie $S \rightarrow AMD|M$ oder $M \rightarrow BMC|\lambda$, die neue Ableitungen hinzukommen: also hier wird $\lambda$ durch das Ersetzen des Nichtterminals $M$ an die Ableitung vom Startzeichen $S$ verschoben und die neue Ableitungen hinzugefügt, wo $M$ wieder durch $\lambda$ (Leeres Zeichen) ersetzt wurde.
     $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Pi_2)$
     $\mathcal{V}_2 := \{S, A, B, C, M, D\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,
     $\Pi_2 := \{$
     $S \rightarrow AMD|AD|M|\lambda$
     $A \rightarrow AA|a$
     $D \rightarrow DD|d$
     $M \rightarrow BMC|BC$
     $B \rightarrow b$
     $C \rightarrow c$
     $\}$
   - In diesem Schritt werden die Ableitungen, die rechts nur eine oder mehr als zwei Variablen erzeugen, durch einen Trick ersetzt, bei dem die einzelnen Variablen durch alle ihre Ableitungen ersetzt werden und für die Ableitungen mit mehr als zwei Variablen ein neues Nichterminal eingeführt wird, was uns die Chomsky-Normalform gewährleistet. $\mathcal{G}_3$ sieht dann so aus:

$\mathcal{G}_3 = (\mathcal{V}_3, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Pi_3)$
$\mathcal{V}_3 := \{S, A, B, C, M, D, X, Y\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,
$\Pi_3 := \{$
$S \to AX|AD|BY|BC|\lambda$
$X \to MD$
$A \to AA|a$
$D \to DD|d$
$M \to BY|BC$
$Y \to MC$
$B \to b$
$C \to c$
$\}$

(c) Die erste mögliche kontextfrei Ableitung: $S \Rightarrow AX \Rightarrow AAX \Rightarrow AAMD \Rightarrow AABYD \Rightarrow AABYDD \Rightarrow AAbYDD \Rightarrow AAbYdd \Rightarrow AAbMCdd \Rightarrow AAbBCCdd \Rightarrow AAbbCCdd \Rightarrow^* aabbccdd$

Die zweite mögliche Ableitung: $S \Rightarrow AX \Rightarrow AMD \Rightarrow AAMD \Rightarrow AAMDD \Rightarrow AABYDD \Rightarrow^* aaBYDD \Rightarrow^* aabYdd \Rightarrow aabMCdd \Rightarrow aabBCCdd \Rightarrow aabbCCdd \Rightarrow^* aabbccdd$

Der dazugehörige Syntaxbaum ist nicht mehrdeutig, deshalb gibt es nicht mehrere Syntaxbäume. Der Syntaxbaum sieht folgendermaßen aus.




3. $L = \{b^n aab^{2n} | n > 0, n \in \mathbb{N}\}$

4. Annahme: $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ sei kontextfrei $\Rightarrow$ dann gibt es nach Pumping-Lemma ein $p \in \mathbb{N}$, sodass sich alle Wörter $z \in \mathcal{L}$ mit $|z| \geq p$ zerlegen lassen. Wähle p passend gemäß Pumpinglemma. O.B.d.A. $p \geq 3$. Betrachte $z = 0^{2^p}$. Nach Pumping-Lemma gibt es Zerlegung $z = uvwxy$ mit den Eigenschaften von Pumping-Lemma. Es gilt dann:

   - $|vx| \geq 1$: sei $vx = 0^m$ für $m \geq 1$
   - $|vwx| \leq n$: $|vwx| \leq p$, also $m \leq p$

   Es ist also $z_0 = uv^0wx^0y = 0^{2^p - m}$. Weiter gilt wegen $p \geq 3$ und $1 \leq m \leq p$ gilt $m < 2^{p-1}$ und daher

   $$2^{p-1} < 2^p - m < 2^p$$

   $\Rightarrow z_0 \notin \mathcal{L}$, Widerspruch

5. Die dazugehörige CNF: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Pi)$
   $\mathcal{V} := \{S, A, B, C, X, Y\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,
   $\Pi := \{$
   $S \to AX|BY|a|\lambda$
   $X \to BY$
   $Y \to XC|c$
   $A \to AA|a$
   $B \to b$
   $C \to c$
   $\}$

   Der zugehörige Kellerautomat $M := (\{a, b, c\}, \{B, S\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta, q_0, S)$

   $$\begin{array}{llll} \delta: & (a, q_0, S) & \mapsto & (q_0, S) \\ & (b, q_0, S) & \mapsto & (q_1, BS) \\ & (\lambda, q_0, S) & \mapsto & (q_0, \lambda) \\ & (b, q_1, B) & \mapsto & (q_1, BB) \\ & (c, q_1, B) & \mapsto & (q_2, \lambda) \\ & (c, q_2, B) & \mapsto & (q_2, \lambda) \\ & (\lambda, q_2, S) & \mapsto & (q_2, \lambda) \end{array}$$