Informatik III - Tutorium IX & X (SR -107)

Tut Nr. 4 – Üb3, det. Turingmaschine

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Informatik
IAKS Beth

19. November 2008

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/

Tutorium 13: Mittwochs 8:00 Uhr - Raum -107
Tutorium 15: Mittwochs 9:45 Uhr - Raum -107

Übungsblattabgabe Donnerstags.

Was wollen wir heute erreichen?

Was wollen wir heute erreichen?

- Wiederholung: Pumping-Lemma korrekt verstehen.

Was wollen wir heute erreichen?

- Wiederholung: Pumping-Lemma korrekt verstehen.
- Einführung in Turingmaschinen.

Was wollen wir heute erreichen?

- Wiederholung: Pumping-Lemma korrekt verstehen.
- Einführung in Turingmaschinen.
- Chomsky-Normalform herstellen können.

Was wollen wir heute erreichen?

- Wiederholung: Pumping-Lemma korrekt verstehen.
- Einführung in Turingmaschinen.
- Chomsky-Normalform herstellen können.
- CYK-Algorithmus anwenden.

Probleme

Ab sofort keine unformalen Automaten mehr. Ein Bild ist kein Automat, sondern stellt u.a. δ graphisch dar.

Probleme

Ab sofort keine unformalen Automaten mehr. Ein Bild ist kein Automat, sondern stellt u.a. δ graphisch dar.

Partnerabgabe ist erwünscht.
Eigentlich reicht es wenn ein Gruppenmitglied eine Lösung abgibt. Die gesamte Gruppe muss sich aber ggf. auftretenden Fragen stellen können.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (K) (6 Punkte)

Gegeben sei folgende Sprache

$$\mathcal{L} = \{w_1 w_2 \in \mathcal{A}^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$$

für das Alphabet $\mathcal{A} = \{a,b,c\}$. Hier gibt $\#_x w$ die Häufigkeit des Vorkommens eines Zeichen $x \in \mathcal{A}$ in einem Wort $w \in \mathcal{A}^*$ an.

i.) Zeigen Sie: $\mathcal{L}$ ist nicht regulär.

ii.) Geben Sie eine Chomsky 2 Grammatik an, die genau die Sprache $\mathcal{L}$ produziert.

iii.) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ an, der genau die Sprache $\mathcal{L}$ erkennt. Zeichnen Sie den Zustandsübergangsgraphen für $\mathcal{M}$.

Wiederholung

Satz: Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass **für jedes Wort** $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n, v \neq \epsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Wiederholung

Satz: Pumping-Lemma

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass **für jedes Wort** $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n, v \neq \epsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis:
Man verwendet das Pumping-Lemma um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist.

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a,b,c\}$

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a, b\}^*, w_2 \in \{b, c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a, b, c\}$

- Annahme: L ist regulär.

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a,b,c\}$

- Annahme: L ist regulär.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ die Pumping-Lemma Zahl.

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a, b\}^*, w_2 \in \{b, c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a, b, c\}$

- Annahme: L ist regulär.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ die Pumping-Lemma Zahl.
- Betrachte $w = a^n c^n \in L$.

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a, b\}^*, w_2 \in \{b, c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a, b, c\}$

- Annahme: L ist regulär.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ die Pumping-Lemma Zahl.
- Betrachte $w = a^n c^n \in L$.
- Es sei dann $w = uvx$ eine Zerlegung wie im PL mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$.

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a,b,c\}$

- Annahme: L ist regulär.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ die Pumping-Lemma Zahl.
- Betrachte $w = a^n c^n \in L$.
- Es sei dann $w = uvx$ eine Zerlegung wie im PL mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$.
- Aufpumpen. Wähle $i = 2$: $uv^2x = a^{n+|v|}c^n \notin L$.

Aufgabe 1i

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a,b,c\}$

- Annahme: L ist regulär.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ die Pumping-Lemma Zahl.
- Betrachte $w = a^n c^n \in L$.
- Es sei dann $w = uvx$ eine Zerlegung wie im PL mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$.
- Aufpumpen. Wähle $i = 2$: $uv^2x = a^{n+|v|}c^n \notin L$.
- Dies ist ein Widerspruch zum PL $\Rightarrow$ L ist nicht regulär.

Aufgabe 1ii

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a,b,c\}$

Aufgabe 1ii

$L = \{w_1 w_2 \in A^* | w_1 \in \{a,b\}^*, w_2 \in \{b,c\}^*, \#_a w_1 + \#_b w_1 = \#_b w_2 + \#_c w_2\}$ mit $A = \{a,b,c\}$

$S \rightarrow A|\lambda$
$A \rightarrow LR|LAR$
$L \rightarrow a|b$
$R \rightarrow b|c$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (K) (2 Punkte)
Die Sprache $\mathcal{L}$ über dem Alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ sei gegeben als

$$\mathcal{L} = \left\{ a^n b^{n^2} | n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{L}$ nicht kontextfrei ist. Der Beweis durch Widerspruch erfolgt mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.
Annahme: $\mathcal{L}$ ist kontextfrei. Dann gilt: Es existiert eine Konstante $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle Worte $w \in \mathcal{L}$ mit $|w| \geq k$ eine Zerlegung $w = uvwxy$ existiert, so dass

$$\begin{array}{rcl} |vx| & \geq & 1 \\ |vwx| & \leq & k \\ \forall i \geq 0 & & uv^iwx^iy \in \mathcal{L} \end{array}$$

.

Betrachtet man das Wort $w = a^k b^{k2}$ (insbesondere gilt dann $|w| \geq k$), so muss für dieses Wort eine Zerlegung $w = uvwxy$ existieren, so dass die obigen Aussagen des Pumping-Lemmas gelten.
Wir machen eine Fallunterscheidung für v und x:

Aufgabe 2

Fall 1 $v = a^{r_1}, x = a^{r_2}$ mit $r_1 + r_2 \geq 1$: Dann gilt $uv^2wx^2y = a^{k+r_1+r_2}b^{k2} \notin \mathcal{L}$

Fall 2 $v = a^{r_3}, x = a^{r_4}b^{r_5}$ mit $r_3 \geq 0, r_4, r_5 \geq 1$: Dann gilt $uv^2wx^2y = a^{k+r_3}b^{r_4}a^{r_5}b^{k2} \notin \mathcal{L}$

Fall 3 $v = a^{r_6}, x = b^{r_7}$ mit $r_6 + r_7 \geq 1$: Dann gilt $uv^2wx^2y = a^{k+r_6}b^{k2+r_7} \notin \mathcal{L}$ oder $uv^3wx^3y = a^{k+2\cdot r_6}b^{k2+2\cdot r_7} \notin \mathcal{L}$, da $(k + r_6)2 \neq k2 + r_7$ oder $(k + 2 \cdot r_6)2 \neq k2 + 2 \cdot r_7$

Fall 4 $v = a^{r_8}b^{r_9}, x = b^{r_{10}}$ mit $r_8, r_9 \geq 1, r_{10} \geq 1$: Dann gilt $uv^2wx^2y = a^kb^{r_9}a^{r_8}b^{k2+r_{10}} \notin \mathcal{L}$

Fall 5 $v = b^{r_{11}}, x = b^{r_{12}}$ mit $r_{11} + r_{12} \geq 1$: Dann gilt $uv^2wx^2y = a^kb^{k2+r_{11}+r_{12}} \notin \mathcal{L}$

Daraus folgt: Es gibt keine Zerlegung $w = uvwxy$ von $w = a^kb^{k2}$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $uv^iwx^iy \in \mathcal{L}$. Das bedeutet, dass die Annahme, dass $\mathcal{L}$ kontextfrei ist, falsch ist.

Chomsky-Normalform

Aufgabe

Gegeben sei die folgende Grammatik: $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathcal{S}, \Pi)$
$\mathcal{V} := \{S, A, M, D\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,
$\Pi := \{\mathcal{S} \rightarrow AMD|M,\ A \rightarrow AA|a, D \rightarrow DD|d,\ M \rightarrow bMc|\lambda\}$

1. Geben Sie die erzeugte Sprache an.
2. Wandeln Sie die gegebene kontextfrei Grammatik $\mathcal{G}$ in eine äquivalente kontextfrei Grammatik $\mathcal{G}^{\text{`}}$ in Chomsky-Normalform um.
3. Geben Sie die zwei verschiedene kontextfreie Ableitung des Wortes $aabbccdd$ aus der Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ an.
4. Geben Sie den Syntaxbaum oder wenn möglich Syntaxbäume in der o.g. Teilaufgabe gegebenen Sprache an. Wie nennt man es, wenn man das Wort aus der Sprache mit verschiedenen Syntaxbäumen beschreiben kann?

Cocke, Younger, Kasami - Algorithmus

Gegeben Sei folgende Grammatik in CNF: $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathcal{S}, \Pi)$

$\mathcal{V} := \{S, A, B, C, M, D, X, Y\}$, $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$,

$\Pi := \{\ S \rightarrow AX|AD|BY|BC|\lambda$

$X \rightarrow MD$

$A \rightarrow AA|a$

$D \rightarrow DD|d$

$M \rightarrow BY|BC$

$Y \rightarrow MC$

$B \rightarrow b$

$C \rightarrow c\ \}$

Zeigen oder Widerlegen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter in der Sprache $\mathcal{L}$ liegen, die durch die Grammatik $\mathcal{G}$ erzeugt wird:

1. aabbccdd
2. abbcc
3. abcdd

deterministische Turingmaschine

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

Q, endliche Zustandsmenge

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

Q, endliche Zustandsmenge

Σ, endliches Bandalphabet

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

- Q, endliche Zustandsmenge
- Σ, endliches Bandalphabet
- $\sqcup$, Blanksymbol, beachte $\sqcup \notin \Sigma$

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

Q, endliche Zustandsmenge

Σ, endliches Bandalphabet

$\sqcup$, Blanksymbol, beachte $\sqcup \notin \Sigma$

Γ, endliches Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

Q, endliche Zustandsmenge

Σ, endliches Bandalphabet

$\sqcup$, Blanksymbol, beachte $\sqcup \notin \Sigma$

Γ, endliches Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$

$s \in Q$, einem Startzustand

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

Q, endliche Zustandsmenge

Σ, endliches Bandalphabet

$\sqcup$, Blanksymbol, beachte $\sqcup \notin \Sigma$

Γ, endliches Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$

$s \in Q$, einem Startzustand

$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, einer Überführungsfunktion.

Definition: deterministische Turingmaschine (DTM)

Eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ besteht aus:

- Q, endliche Zustandsmenge
- Σ, endliches Bandalphabet
- $\sqcup$, Blanksymbol, beachte $\sqcup \notin \Sigma$
- Γ, endliches Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $s \in Q$, einem Startzustand
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, einer Überführungsfunktion.
- $F \subseteq Q$, Menge von Endzuständen. (Muss nicht sein.)

Definition:

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine TM gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.

Definition:

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine TM gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine TM gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$. (Das Verhalten der TM für $w \notin L$ ist nicht defniniert.)

Churche These:

Die durch die formale Definition der Turing-Berechenbarkeit erfasste Klasse von Funktionen stimmt genau mit der Klasse der im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen überein.

Aufgabe

Entwerfe eine DTM, die als Eingabe eine (zusammenhängende) Folge von Nullen erhält und als Ausgabe eine Folge von Einsen der doppelten Länge auf das Band schreibt. Beschreibe zunächst kurz in Worten, wie die Turingmaschine funktioniert.

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-Lemma wiederholt

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-Lemma wiederholt
- Chomsky-Normalform

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-Lemma wiederholt
- Chomsky-Normalform
- CYK-Algorithmus

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-Lemma wiederholt
- Chomsky-Normalform
- CYK-Algorithmus
- deterministische Turingmaschine

Noch Fragen?

Vorschau

Vorschau

- Abschlusseigenschaften

Vorschau

- Abschlusseigenschaften
- Entscheidbarkeit

Vorschau

- Abschlusseigenschaften
- Entscheidbarkeit
- Kapitel kontextfreie Sprachen abschließen

Bis zum nächsten Mal