



Informatik III - Tutorium XIII & XV (SR -107)

Tut Nr. 5 – Üb4, Entscheidbarkeit

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Informatik
ITI Wagner

28. November 2007



Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825



Inhaltsverzeichnis

1 Auftakt



Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele



Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele
- 3 Themen
 - Übungsblatt 4
 - Wiederholung
 - Post'sches Korrespondenzproblem
 - Abschlusseigenschaften



Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele
- 3 Themen
 - Übungsblatt 4
 - Wiederholung
 - Post'sches Korrespondenzproblem
 - Abschlusseigenschaften
- 4 Abspann



Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

<https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/>

Tutorium 13: Mittwochs 8:00 Uhr - Raum -107

Tutorium 15: Mittwochs 9:45 Uhr - Raum -107

Übungsblattabgabe Donnerstag.



Was wollen wir heute erreichen?



Was wollen wir heute erreichen?

- Kapitel **Entscheidbarkeit** abschliessen.



Probleme

Ab sofort kein Bleistift mehr.

Nur dokumentenechte Stifte verwenden, z.B. Füller, Kuli, etc.



Probleme

Ab sofort kein Bleistift mehr.

Nur dokumentenechte Stifte verwenden, z.B. Füller, Kuli, etc.

Partnerabgabe ist sehr gerne erwünscht.



Probleme

Ab sofort kein Bleistift mehr.

Nur dokumentenechte Stifte verwenden, z.B. Füller, Kuli, etc.

Partnerabgabe ist sehr gerne erwünscht.

”...ich glaube, meine TM macht...”

”...meiner festen Überzeugung nach, sind...”

”...vielleicht stimmt meine Lösung...”



Aufgabe 5

Zeigen Sie,

- a) dass die Relation $R_{\mathcal{A}}$ aus dem Beweis zum Satz von Nerode eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation ist.



Aufgabe 5

Zeigen Sie,

- a) dass die Relation R_A aus dem Beweis zum Satz von Nerode eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation ist.
- b) dass jede Äquivalenzrelation R über einer Menge A diese Menge in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen zerlegt.



Aufgabe 5

Zeigen Sie,

- a) dass die Relation R_A aus dem Beweis zum Satz von Nerode eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation ist.
- b) dass jede Äquivalenzrelation R über einer Menge A diese Menge in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen zerlegt.

Hinweis zur Notation: Zu $x \in A$ bezeichne $[x] := \{x' \in A : xRx'\}$ die Äquivalenzklasse von x .



Aufgabe 5a

Zu zeigen: R_A ist rechtsinvariante Äquivalenzrelation:



Aufgabe 5a

Zu zeigen: $R_{\mathcal{A}}$ ist rechtsinvariante Äquivalenzrelation:

$$\forall x, y, z \in \Sigma^*$$

Symmetrie:

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \Leftrightarrow \delta(s, y) = \delta(s, x) \Leftrightarrow yR_{\mathcal{A}}x \quad \checkmark$$



Aufgabe 5a

Zu zeigen: $R_{\mathcal{A}}$ ist rechtsinvariante Äquivalenzrelation:

$$\forall x, y, z \in \Sigma^*$$

Symmetrie:

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \Leftrightarrow \delta(s, y) = \delta(s, x) \Leftrightarrow yR_{\mathcal{A}}x \quad \checkmark$$

Reflexivität:

$$xR_{\mathcal{A}}x \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, x) \quad \checkmark$$



Aufgabe 5a

Zu zeigen: $R_{\mathcal{A}}$ ist rechtsinvariante Äquivalenzrelation:

$$\forall x, y, z \in \Sigma^*$$

Symmetrie:

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \Leftrightarrow \delta(s, y) = \delta(s, x) \Leftrightarrow yR_{\mathcal{A}}x \quad \checkmark$$

Reflexivität:

$$xR_{\mathcal{A}}x \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, x) \quad \checkmark$$

Transitivität:

$$\begin{aligned} xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \text{ und } yR_{\mathcal{A}}z \Leftrightarrow \delta(s, y) = \delta(s, z) \\ \Rightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) = \delta(s, z) \Leftrightarrow xR_{\mathcal{A}}z \quad \checkmark \end{aligned}$$



Aufgabe 5a

Zu zeigen: $R_{\mathcal{A}}$ ist rechtsinvariante Äquivalenzrelation:

$$\forall x, y, z \in \Sigma^*$$

Symmetrie:

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \Leftrightarrow \delta(s, y) = \delta(s, x) \Leftrightarrow yR_{\mathcal{A}}x \quad \checkmark$$

Reflexivität:

$$xR_{\mathcal{A}}x \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, x) \quad \checkmark$$

Transitivität:

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \text{ und } yR_{\mathcal{A}}z \Leftrightarrow \delta(s, y) = \delta(s, z) \\ \Rightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) = \delta(s, z) \Leftrightarrow xR_{\mathcal{A}}z \quad \checkmark$$

Rechtsinvarianz: z.z.:

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \delta(s, x) = \delta(s, y) \Rightarrow \delta(s, xz) = \delta(s, yz) \Leftrightarrow xzR_{\mathcal{A}}yz \\ \delta(s, xz) = \delta(\delta(s, x), z) = \delta(\delta(s, y), z) = \delta(s, yz) \Rightarrow xzR_{\mathcal{A}}yz \quad \checkmark$$



Aufgabe 5b

$$\bigcup_{x \in A} [x] = A:$$

" \subseteq ": Sei $y \in \bigcup_{x \in A} [x]$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $y \in [x]$. Nach Definition von $[x]$ ist $y \in A$.

" \supseteq ": Sei $y \in A$. Dann gilt $[y] \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]$ und damit $y \in \bigcup_{x \in A} [x]$.

Seien $x, y \in A$ mit $x \star Ry \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

Annahme: $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Sei $z \in [x] \cap [y]$. Dann gelten nach Definition zRx und zRy und wegen der Transitivität von R auch xRy . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.



Aufgabe 6

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils die Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation R_L an.

Welche der Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

Konstruieren Sie für diese Sprachen jeweils den Minimalautomaten.

a) $L_1 = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}, i \geq 1\}, \Sigma = \{a\}$



Aufgabe 6

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils die Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation R_L an.

Welche der Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

Konstruieren Sie für diese Sprachen jeweils den Minimalautomaten.

- a) $L_1 = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}, i \geq 1\}, \Sigma = \{a\}$
- b) $L_2 = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}, \Sigma = \{0, 1\}$



Aufgabe 6

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils die Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Relation R_L an.

Welche der Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

Konstruieren Sie für diese Sprachen jeweils den Minimalautomaten.

- a) $L_1 = \{a^{2^i} \mid i \in \mathbb{N}, i \geq 1\}$, $\Sigma = \{a\}$
- b) $L_2 = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$
- c) $L_3 = \{0^i 1^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i < j\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$



Aufgabe 6a

$$[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$$



Aufgabe 6a

$$[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$$
$$[a] := \{a^{2i+1} \mid i \geq 0\}$$



Aufgabe 6a

$$[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$$

$$[a] := \{a^{2i+1} \mid i \geq 0\}$$

$$[aa] := \{a^{2i} \mid i \geq 1\}$$



Aufgabe 6a

$$[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$$

$$[a] := \{a^{2i+1} \mid i \geq 0\}$$

$$[aa] := \{a^{2i} \mid i \geq 1\}$$

Diese drei Äquivalenzklassen sind paarweise disjunkt und es gilt

$$[\varepsilon] \cup [a] \cup [aa] = \Sigma^*$$



Aufgabe 6a

$$[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$$

$$[a] := \{a^{2i+1} \mid i \geq 0\}$$

$$[aa] := \{a^{2i} \mid i \geq 1\}$$

Diese drei Äquivalenzklassen sind paarweise disjunkt und es gilt

$$[\varepsilon] \cup [a] \cup [aa] = \Sigma^*$$

Der Index der Neroderelation ist drei und somit ist die Sprache L_1 nach dem Satz von Nerode regulär.

TODO Automat



Aufgabe 6b

Seien $x, y \in \{0, 1\}^*$ mit $x \neq y$ und $|x| \leq |y|$.

Sei $x = x_1 \dots x_n$, $y = y_1 \dots y_m$.

Sei weiter $j := (n + m + 2)/2$ und a bezeichne das j -te Zeichen von yx . (Da $m \geq n$ ist dies genau das j -te Zeichen von y .)

Sei b das zu a 'inverse' Symbol.

Behauptung:

Dann haben wir einen Zeugen $z = bxb$ gefunden, der beweist, dass x und y in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen, denn es gilt $xz = xbx b \in L_2$ und $yz = ybx b \in L_2$.



Aufgabe 6b

Zu zeigen ist also nun noch $yxbx \notin L_2$.

Annahme: $yz \in L_2$.

Dann gilt $yz = ww$ für ein $w \in \{0, 1\}^*$. Nach Konstruktion gilt $|ww| = |yxbx| = n + m + 2$, also $|w| = j$. Das Wort w enthält also genau die ersten j Zeichen von y und endet somit mit a .

Andererseits endet w mit b , da $ww = yxbx$. Das ist ein Widerspruch. Somit gilt $yz \notin L_2$.

Damit bildet jedes Wort eine eigene Äquivalenzklasse und es gilt $Eq(L_2) = \{[w] \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

Der Index der Neroderelation ist daher nicht endlich und somit ist L_2 auch nicht regulär.

Deshalb können wir auch keinen Automaten angeben.



Aufgabe 6c

Seien $i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $w_1 = 0^i 1^j$, $w_2 = 0^k 1^l$ mit $w_1 \neq w_2$. Es gibt nun ein Wort $z = 1^m$ minimaler Länge mit $w_1 z \in L_3$ oder $w_2 z \in L_3$. Es sind also beide Wörter in L_3 , wenn entweder $m = 0$ (das bedeutet $i < j$ und $k < l$) oder $m > 0$ und $i - j = k - l$ (das bedeutet $i - j = m - 1$).

Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $[n] := \{0^i 1^j \mid i - j = n, j \geq 1\}$ (Für $w \in [n]$ gilt $w 1^{n+1} \in L_3$).

Ausserdem bezeichnen $[-1] := \{0^i 1^j \mid i < j\}$ und

$[\infty] := \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält } 10\}$

Darüberhinaus bilden die Wörter der Form 0^i jeweils eine eigene Äquivalanzklasse. Sie sind nicht in der Äquivalenzklasse $[i]$ enthalten, da $0^i \cdot 01^{i+2} \in L_3$ aber $0^{i+1} \cdot 01^{i+2} \notin L_3$. Dann gilt:

$Eq(L_3) = \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{[0^i] \mid i \geq 1\} \cup \{[-1], [\infty]\}$.

Der Index der Neroderelation ist daher nicht endlich und somit ist



Aufgabe 7

Entwerfen Sie eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, die zu einer gegebenen Eingabe $w \in \{0, 1\}^*$ das Spiegelwort w^R berechnet.

Beschreiben Sie zunächst kurz in Worten, wie Ihre Turing-Maschine arbeitet.

Welche Konfigurationen durchläuft die von Ihnen entworfene Turing-Maschine, wenn sie als Eingabe das Wort 010 erhält?

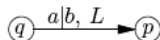


Abbildung 3.3: Übergang von Zustand q nach p

3.2 Bemerkung

- (1) Der Übergang $\delta(q, a) = (p, b, L)$ wird graphisch dargestellt wie in Abbildung 3.3.

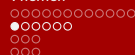
Bedeutung: Ist die Turing-Maschine im Zustand q und liest das Symbol a , so überschreibt sie dieses a mit b , geht auf dem Band eine Stelle nach links und wechselt in den Zustand p .

- (2) Die Turing-Maschine startet im Zustand s , wobei der Lese-/Schreibkopf an der linkensten Stelle des Bandes, in der ein Eingabesymbol steht, positioniert ist. (Konvention)
- (3) Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie zum ersten Mal in einen Endzustand kommt oder in einem Zustand q ein Symbol a liest und $\delta(q, a) = (q, a, N)$ ist. Das bedeutet insbesondere, dass Übergänge, die aus Endzuständen herausführen, sinnlos sind.



Aufgabe 8

Ist die Menge der geraden Zahlen entscheidbar?
Geben Sie eine kurze Begründung.



Definition:

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine TM gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.



Definition:

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine TM gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine TM gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$. (Das Verhalten der TM für $w \notin L$ ist nicht definiert.)



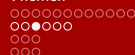
Definition:

- Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ heisst **berechenbar** oder **totalrekursiv**, wenn es eine TM gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w) \in \Gamma^*$ ausgibt.



Definition:

- Eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ heisst **berechenbar** oder **totalrekursiv**, wenn es eine TM gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w) \in \Gamma^*$ ausgibt.
- Eine TM realisiert eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, falls gilt:
$$f(w) = \begin{cases} \text{Ausgabe der TM,} & \text{wenn sie bei Eingabe } w \text{ stoppt.} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst} \end{cases}$$



Definition:

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **entscheidbar** \Leftrightarrow ihre charakterische Funktion χ_L berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } \chi_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Definition:

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **entscheidbar** \Leftrightarrow ihre charakterische Funktion χ_L berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } \chi_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **semi-entscheidbar** \Leftrightarrow Funktion χ_L^* berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L^*(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$



Church These:

Die durch die formale Definition der Turing-Berechenbarkeit erfasste Klasse von Funktionen stimmt genau mit der Klasse der im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen überein.



Satz von Rice

Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache:

$L(S) := \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$
nicht entscheidbar.



Aufgabe 1

Zeige, dass die Menge der Turing-Maschinencodes von TMs, die alle aus Palindromen bestehenden Eingaben (möglicherweise zusammen mit anderen Eingaben) akzeptieren, unentscheidbar ist.



Definition: Post'sches Korrespondenzproblem

Geg.: Folge von Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ über einem endlichen Alphabet Σ .

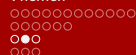
Es gilt weiter $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$.

Gesucht: ist nun, ob es eine endliche Folge von Indizes

$i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdots y_{i_k}$ gilt.

Satz: Post'sches Korrespondenzproblem

Das Post'sche Korrespondenzproblem ist nicht entscheidbar.



Aufgabe 2

Besitzt die folgende Instanz des PKP eine Lösung? Die Instanz wird von zwei Listen, A und B , repräsentiert, und die i -ten Zeichenreihen der beiden Listen korrespondieren für jedes $i = 1, 2, \dots$

$$A = (01, 001, 10)$$

$$B = (011, 10, 00)$$



Aufgabe 3

Angenommen, wir beschränken PKP auf ein Alphabet aus einem Symbol, beispielsweise $\Sigma = \{0\}$.

Wäre dieser eingeschränkte Fall des PKP noch immer unentscheidbar?



Abschluss entscheidbarer Sprachen

- Komplementbildung
- Schnitt
- Vereinigung

Abschluss semi-entscheidbarer Sprachen

- Schnitt
- Vereinigung



Aufgabe 4

Zeige die Abgeschlossenheit von entscheidbaren Sprachen unter Vereinigung. Hinweis: verwende k-Band Turingmaschine.



Aufgabe 5

Zeige die Abgeschlossenheit von semi-entscheidbaren Sprachen unter Vereinigung. Hinweis: verwende k-Band Turingmaschine.



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Aufgaben lösen zum Post'sches Korrespondenzproblem



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Aufgaben lösen zum Post'sches Korrespondenzproblem
- Satz von Rice anwenden



Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Aufgaben lösen zum Post'sches Korrespondenzproblem
- Satz von Rice anwenden
- Kapitel Berechenbarkeit abgeschlossen



Noch Fragen?



Vorschau



Vorschau

- Komplexitätsklasse \mathcal{P} und \mathcal{NP}



Vorschau

- Komplexitätsklasse \mathcal{P} und \mathcal{NP}
- nichtdeterministische Turingmaschine



Vorschau

- Komplexitätsklasse \mathcal{P} und \mathcal{NP}
- nichtdeterministische Turingmaschine
- uvm...



Bis zum nächsten Mal

