Informatik III - Tutorium XIII & XV (SR -107)

Tut Nr. 2 – Üb1, NEA $\longrightarrow$ DEA, reg. Sp. $\longrightarrow$ NEA, ε-NEA

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Informatik
ITI Wagner

7. November 2007

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/∼uhbro/

Tutorium 13: Mittwochs 8:00 Uhr - Raum -107
Tutorium 15: Mittwochs 9:45 Uhr - Raum -107

Übungsblattabgabe Donnerstag.

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

- Umformungsalgorithmen anwenden können.

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

- Umformungsalgorithmen anwenden können.
- Aufgaben lösen.

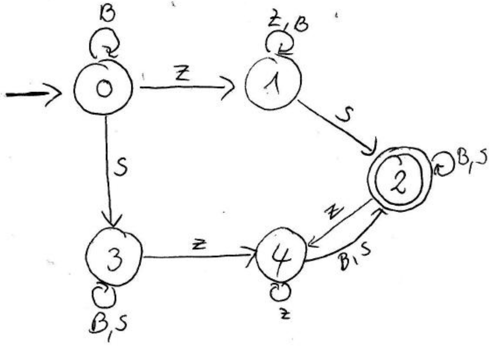
Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

- Umformungsalgorithmen anwenden können.
- Aufgaben lösen.
- Zusammenhänge wiederholt verstehen.

Übungsblatt 1

Aufgabe 4



$B = \{a, b, c, \dots, z\}$

$Z = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$S = \{\#, \$, \%\}$

Aufgabe 5

a) $A^* \cup B^* \neq (A \cup B)^*$
$(ab)^*$ ist in $(A \cup B)^*$, aber nicht in $A^* \cup B^*$

Aufgabe 5

a) $A^* \cup B^* \neq (A \cup B)^*$
$(ab)^*$ ist in $(A \cup B)^*$, aber nicht in $A^* \cup B^*$

b) $(A^*)^* = A^*$

Aufgabe 5

a) $A^* \cup B^* \neq (A \cup B)^*$
$(ab)^*$ ist in $(A \cup B)^*$, aber nicht in $A^* \cup B^*$

b) $(A^*)^* = A^*$

c) $(AB)C = A(BC)$
siehe 6a)

Aufgabe 5

a) $A^* \cup B^* \neq (A \cup B)^*$
$(ab)^*$ ist in $(A \cup B)^*$, aber nicht in $A^* \cup B^*$

b) $(A^*)^* = A^*$

c) $(AB)C = A(BC)$
siehe 6a)

d) $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$

Aufgabe 5

a) $A^* \cup B^* \neq (A \cup B)^*$
$(ab)^*$ ist in $(A \cup B)^*$, aber nicht in $A^* \cup B^*$

b) $(A^*)^* = A^*$

c) $(AB)C = A(BC)$
siehe 6a)

d) $(A \cup B)^* = (A^* B^*)^*$

e) $(A \cup B)C = AC \cup BC$
$d \in (A \cup B)C \Leftrightarrow d \in AC \vee d \in BC \Leftrightarrow d \in AC \cup BC$

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:

- " $\cdot$ " ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:

- "$\cdot$" ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ
- neutrales Element: $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma^*$

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:
- " $\cdot$ " ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ
- neutrales Element: $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma^*$

b) z.B.: Def. 2.7, Def. 2.8, Satz 2.9, Satz 2.14

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:
   - " $\cdot$ " ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ
   - neutrales Element: $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma^*$

b) z.B.: Def. 2.7, Def. 2.8, Satz 2.9, Satz 2.14

c) Unterschied von ε, $\{\varepsilon\}$ und $\emptyset$

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:
   - "$\cdot$" ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ
   - neutrales Element: $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma^*$

b) z.B.: Def. 2.7, Def. 2.8, Satz 2.9, Satz 2.14

c) Unterschied von ε, $\{\varepsilon\}$ und $\emptyset$
   - ε ist eintweder ein Wort, nämlich das leere Wort, oder bezeichnet einen regulären Ausdruck, nämlich den Ausdruck, der die Menge $\{\varepsilon\}$ beschreibt.

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:
  - ” $\cdot$ ” ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ
  - neutrales Element: $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma^*$

b) z.B.: Def. 2.7, Def. 2.8, Satz 2.9, Satz 2.14

c) Unterschied von ε, $\{\varepsilon\}$ und $\emptyset$
  - ε ist eintweder ein Wort, nämlich das leere Wort, oder bezeichnet einen regulären Ausdruck, nämlich den Ausdruck, der die Menge $\{\varepsilon\}$ beschreibt.
  - $\{\varepsilon\}$ ist eine Sprache, sogar eine reguläre.

Aufgabe 6

a) $(\Sigma^*, \cdot)$ Monoid: z.z.:

- ” $\cdot$ ” ist assoziativ: klar, da für Konkatenation assoziativ
- neutrales Element: $\varepsilon \in \Sigma^*$ und $\varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma^*$

b) z.B.: Def. 2.7, Def. 2.8, Satz 2.9, Satz 2.14

c) Unterschied von ε, $\{\varepsilon\}$ und $\emptyset$

- ε ist eintweder ein Wort, nämlich das leere Wort, oder bezeichnet einen regulären Ausdruck, nämlich den Ausdruck, der die Menge $\{\varepsilon\}$ beschreibt.
- $\{\varepsilon\}$ ist eine Sprache, sogar eine reguläre.
- $\emptyset$ ist eine Sprache, auch eine reguläre.

Aufgabe 7

$$\Sigma = \{a, b, c\},\ L_1 = \{aaa, aa, abc, ac\}$$
$$L_2 = \{aa, c, b\},\ L_3 = \{a, b\}$$

Aufgabe 7

$$\Sigma = \{a, b, c\},\ L_1 = \{aaa, aa, abc, ac\}$$
$$L_2 = \{aa, c, b\},\ L_3 = \{a, b\}$$
$$L_1/L_2 = \{\varepsilon, a, ab\}$$

Aufgabe 7

$$\Sigma = \{a, b, c\},\ L_1 = \{aaa, aa, abc, ac\}$$
$$L_2 = \{aa, c, b\},\ L_3 = \{a, b\}$$
$$L_1/L_2 = \{\varepsilon, a, ab\}$$
$$(L_2)^3 = \{aaaaaa, aaaac, aaaab, aabaa, aabb, ...\}$$
$$|(L_2)^3| = 27$$

Aufgabe 7

$$\Sigma = \{a, b, c\},\ L_1 = \{aaa, aa, abc, ac\}$$
$$L_2 = \{aa, c, b\},\ L_3 = \{a, b\}$$
$$L_1/L_2 = \{\varepsilon, a, ab\}$$
$$(L_2)^3 = \{aaaaaa, aaaac, aaaab, aabaa, aabb, ...\}$$
$$|(L_2)^3| = 27$$
$$L_1 \cdot L_2 = \{aaaaa, aaac, aaab, aaaa, aac,$$
$$aab, abcaa, abcc, abcb, acaa, acc, acb\}$$

Aufgabe 7

$$\Sigma = \{a, b, c\},\ L_1 = \{aaa, aa, abc, ac\}$$
$$L_2 = \{aa, c, b\},\ L_3 = \{a, b\}$$

$$L_1/L_2 = \{\varepsilon, a, ab\}$$

$$(L_2)^3 = \{aaaaaa, aaaac, aaaab, aabaa, aabb, ...\}$$
$$|(L_2)^3| = 27$$

$$L_1 \cdot L_2 = \{aaaaa, aaac, aaab, aaaa, aac,$$
$$aab, abcaa, abcc, abcb, acaa, acc, acb\}$$

$$L_3^c = \Sigma^* \backslash \{a, b\}$$

Wiederholung

induktive Definition: Eine Sprache L heisst regulär, wenn gilt:

Wiederholung

induktive Definition: Eine Sprache L heisst regulär, wenn gilt:

- $L = \{a\}$ mit $a \in \Sigma$ oder
- $L = \emptyset$

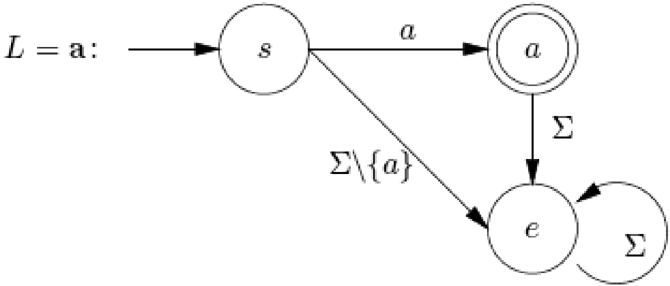
Wiederholung

induktive Definition: Eine Sprache L heisst regulär, wenn gilt:

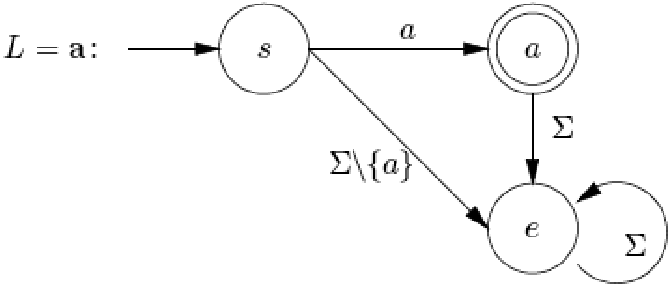
- $L = \{a\}$ mit $a \in \Sigma$ oder
- $L = \emptyset$
- $L = L_1 \cup L_2$ oder
- $L = L_1 \cdot L_2$ oder
- $L = L_1^*$

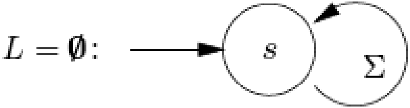
Ein induktives Schema, orientiert am Beweis zu Satz 2.9:

Ein induktives Schema, orientiert am Beweis zu Satz 2.9:

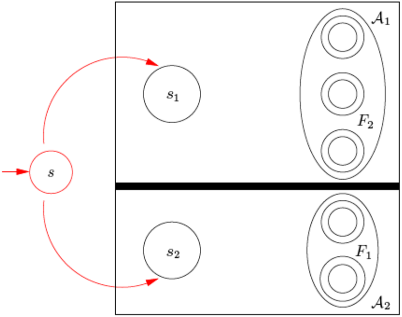


Ein induktives Schema, orientiert am Beweis zu Satz 2.9:

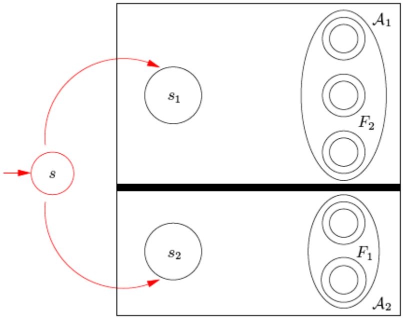


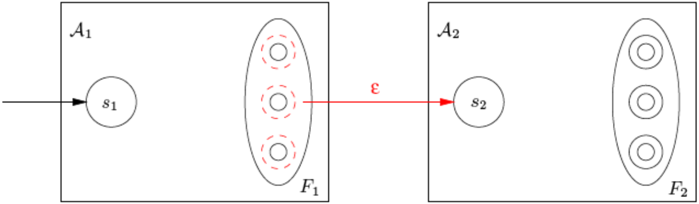


reguläre Sprache ⟶ endl. Automat

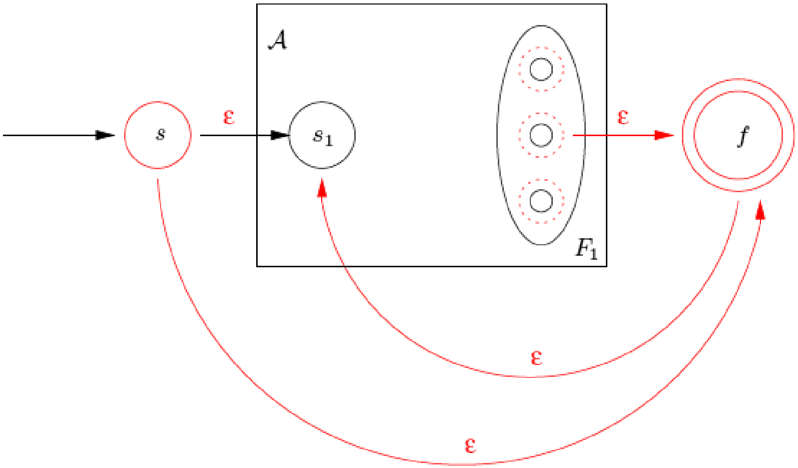


reguläre Sprache → endl. Automat





reguläre Sprache → endl. Automat



Aufgabe 1

Konstruiere einen NEA $M1$, der alle Wörter über $\Sigma = \{a, b, c\}$ akzeptiert, die durch folgenden regulären Ausdruck beschrieben sind: $\{a\} \cdot \Sigma^* \cdot \{a\}$.

Aufgabe 2

Konstruiere einen NEA $M2$, der alle Wörter aus $\{a, b\}^*$ akzeptiert, die das Teilwort bab enthalten.

Aufgabe 3

Konstruiere einen NEA $M3$, der alle Wörter, die aa oder bb enthalten, akzeptiert. Beginne mit dem regulären Ausdruck.

Wiederholung

Definition: ε-Übergänge beim NEA

Wiederholung

Definition: ε-Übergänge beim NEA

Für einen Zustand $q \in Q$ ist der ε-Abschluss $E(q)$ wie folgt definiert:
$E(q) := \{p \in Q | p$ ist von q durch eine Folge von ε-Übergängen erreichbar.$\}$
Beachte:
$E(q) \subseteq Q$, $E(q) \in 2^Q$, $q \in E(q)$

Potenzmengenkonstruktion

Gegeben sei ein NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen DEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$

Potenzmengenkonstruktion

Gegeben sei ein NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen DEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$

- $\tilde{Q} = 2^Q$, d.h. die Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen des NEA.

Potenzmengenkonstruktion

Gegeben sei ein NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen DEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$

- $\tilde{Q} = 2^Q$, d.h. die Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen des NEA.
- $\tilde{\delta} : \tilde{Q} \times \Sigma \to \tilde{Q}$ # interessante Teil

Potenzmengenkonstruktion

Gegeben sei ein NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen DEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$

- $\tilde{Q} = 2^Q$, d.h. die Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen des NEA.
- $\tilde{\delta} : \tilde{Q} \times \Sigma \to \tilde{Q}$ # interessante Teil
- $\tilde{s} := E(s)$

Potenzmengenkonstruktion

Gegeben sei ein NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen DEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$

- $\tilde{Q} = 2^Q$, d.h. die Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen des NEA.
- $\tilde{\delta} : \tilde{Q} \times \Sigma \rightarrow \tilde{Q}$ # interessante Teil
- $\tilde{s} := E(s)$
- $\tilde{F} := \{\tilde{q} \in \tilde{Q} | \tilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$

Aufgabe 1 Fortsetzung

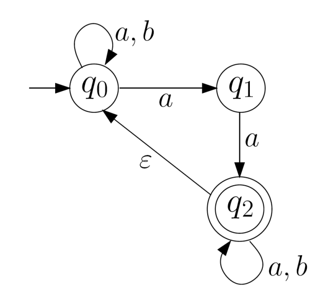
Finde mit Potenzmengenkonstruktion einen zum NEA $M1$ äquivalenten DEA.

Aufgabe 2 Fortsetzung

Finde mit Potenzmengenkonstruktion einen zum NEA $M2$ äquivalenten DEA.

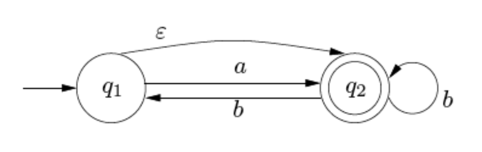
Aufgabe 4

Finde mit Potenzmengenkonstruktion einen zu folgendem NEA äquivalenten DEA.



Aufgabe 5

Finde mit Potenzmengenkonstruktion einen zu folgendem NEA äquivalenten DEA.



ε-NEA $\longrightarrow$ NEA

Gegeben sei ein ε-NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen äquivalenten NEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ ohne ε-Übergänge.

ε-NEA $\longrightarrow$ NEA

Gegeben sei ein ε-NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen äquivalenten NEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ ohne ε-Übergänge.

- $\tilde{Q} = (Q \backslash F) \cup \tilde{F}$

ε-NEA $\longrightarrow$ NEA

Gegeben sei ein ε-NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen äquivalenten NEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ ohne ε-Übergänge.

- $\tilde{Q} = (Q \backslash F) \cup \tilde{F}$
- $\tilde{\delta}(q, a) = \begin{cases} \{q\}, & \text{falls } a = \varepsilon \\ \delta(E(q), a), & \text{sonst.} \end{cases}$

ε-NEA $\longrightarrow$ NEA

Gegeben sei ein ε-NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen äquivalenten NEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ ohne ε-Übergänge.

- $\tilde{Q} = (Q \backslash F) \cup \tilde{F}$
- $\tilde{\delta}(q, a) = \begin{cases} \{q\}, & \text{falls } a = \varepsilon \\ \delta(E(q), a), & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\tilde{s} := s$

ε-NEA $\longrightarrow$ NEA

Gegeben sei ein ε-NEA $A := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Wir konstruieren daraus einen äquivalenten NEA $\tilde{A} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ ohne ε-Übergänge.

- $\tilde{Q} = (Q \backslash F) \cup \tilde{F}$
- $\tilde{\delta}(q, a) = \begin{cases} \{q\}, & \text{falls } a = \varepsilon \\ \delta(E(q), a), & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\tilde{s} := s$
- $\tilde{F} := \{q | E(q) \cap F \neq \emptyset\}$

Aufgabe 6

Sei $A = (\{s, p, f\}, \{a, b, c\}, \delta, s, \{f\})$ der NEA mit der in der Tabelle dargestellten Übergangsfunktion δ:

	ε	a	b	c
s	$\{p, f\}$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{f\}$
p	$\emptyset$	$\{s\}$	$\{f\}$	$\{s, p\}$
f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Aufgabe 6

Sei $A = (\{s, p, f\}, \{a, b, c\}, \delta, s, \{f\})$ der NEA mit der in der Tabelle dargestellten Übergangsfunktion δ:

	ε	a	b	c
s	$\{p, f\}$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{f\}$
p	$\emptyset$	$\{s\}$	$\{f\}$	$\{s, p\}$
f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

a) Berechne für jeden Zustand den ε-Abschluss.

Aufgabe 6

Sei $A = (\{s, p, f\}, \{a, b, c\}, \delta, s, \{f\})$ der NEA mit der in der Tabelle dargestellten Übergangsfunktion δ:

	ε	a	b	c
s	$\{p, f\}$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{f\}$
p	$\emptyset$	$\{s\}$	$\{f\}$	$\{s, p\}$
f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

a) Berechne für jeden Zustand den ε-Abschluss.

b) Gib einen äquivalenten NEA ohne ε-Übergänge an.

Aufgabe 6

Sei $A = (\{s, p, f\}, \{a, b, c\}, \delta, s, \{f\})$ der NEA mit der in der Tabelle dargestellten Übergangsfunktion δ:

	ε	a	b	c
s	$\{p, f\}$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{f\}$
p	$\emptyset$	$\{s\}$	$\{f\}$	$\{s, p\}$
f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

a) Berechne für jeden Zustand den ε-Abschluss.

b) Gib einen äquivalenten NEA ohne ε-Übergänge an.

c) Gib einen reg. Ausdruck für die vom Automaten akzeptierte Sprache an.

Satz: DEA $\Leftrightarrow$ NEA $\Leftrightarrow$ ε-NEA $\Leftrightarrow$reg. Sprache

DEA, NEA, ε-NEA und reg. Sprache sind äquivalent.

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt sauber und formal (einigermassen) korrekt bearbeiten.

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt sauber und formal (einigermassen) korrekt bearbeiten.
- NEA $\longrightarrow$ DEA (Potenzmengenkonstruktion)

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt sauber und formal (einigermassen) korrekt bearbeiten.
- NEA $\longrightarrow$ DEA (Potenzmengenkonstruktion)
- reguläre Sprache $\longrightarrow$ endl. Automat

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Übungsblatt sauber und formal (einigermassen) korrekt bearbeiten.
- NEA $\longrightarrow$ DEA (Potenzmengenkonstruktion)
- reguläre Sprache $\longrightarrow$ endl. Automat
- ε-NEAs $\longrightarrow$ NEA

Noch Fragen?

Vorschau

Vorschau

- Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Vorschau

- Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
- Automatenminimierung

Bis zum nächsten Mal