

# Informatik III - Tutorium XIII & XV (SR -107)

## Tut Nr. 12 – Üb11, kontextfreie Sprachen

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)  
Institut für Informatik  
ITI Wagner

30. Januar 2008



Universität Karlsruhe (TH)  
Forschungsuniversität • gegründet 1825



# Inhaltsverzeichnis

## 1 Auftakt

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele

# Inhaltsverzeichnis

## ① Auftakt

## ② Lernziele

## ③ Themen

Übungsblatt 11

Pumping-Lemma

Ogden's Lemma

Endliche CH-2 Grammatik

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Auftakt
- 2 Lernziele
- 3 Themen
  - Übungsblatt 11
  - Pumping-Lemma
  - Ogden's Lemma
  - Endliche CH-2 Grammatik
- 4 Abspann



## Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

<https://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uhbro/>

Tutorium 13: Mittwochs 8:00 Uhr - Raum -107

Tutorium 15: Mittwochs 9:45 Uhr - Raum -107

Übungsblattabgabe Donnerstag.



# Was wollen wir heute erreichen?



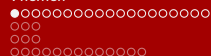
## Was wollen wir heute erreichen?

- Pumping-/Odgen's-Lemma für kfG anwenden



## Was wollen wir heute erreichen?

- Pumping-/Odgen's-Lemma für kfG anwenden
- Algorithmus für nutzlose Symbole



## Aufgabe 7

Gegeben sei die Grammatik  $G_1 = (\Sigma, V, S, R)$  mit  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $V = \{S, A, B\}$  und der Regelmenge  $R$ :

$$S \rightarrow aA \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow aS \mid bB$$

$$B \rightarrow bB \mid bA .$$

- 1 Welchen Chomsky-Typ hat  $G_1$ ?
- 2 Konstruiere einen nichtdeterministischen endlichen Automaten für  $L(G)$  mithilfe des Verfahrens aus dem Skript.



# Aufgabe 7

- 1  $G_1$  ist eine CH-3-Grammatik.



## Aufgabe 7

- $G_1$  ist eine CH-3-Grammatik.
- Wir konstruieren einen NEA  $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  mit

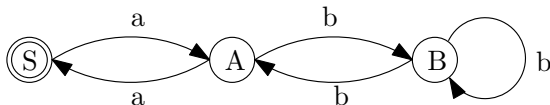
$$Q = V = \{S, A, B\}$$

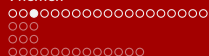
$$q_0 = S$$

$$F = \{A \in V \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in R\} = \{S\} \text{ und}$$

$$\delta(A, a) = \{B \mid (A \rightarrow aB) \in R\}$$

Die Übergangsfunktion  $\delta$  ist gegeben durch:





## Aufgabe 8

Gegeben sei die Grammatik  $G_2 = (\Sigma, V, S, R)$  mit  $\Sigma = \{a, c, d\}$ ,  $V = \{A, B, C, D, S\}$  und folgender Regelmenge  $R$ :

$$S \rightarrow A \mid aB \mid aC$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid cAd$$

$$B \rightarrow S \mid Ba \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow D \mid c$$

$$D \rightarrow d \mid dDD$$

- 1 Welchen Chomsky-Typ hat  $G_2$ ?
- 2 Überführe  $G_2$  in Chomsky-Normalform.



# Aufgabe 8

- 1  $G_1$  ist eine CH-2-Grammatik.



## Aufgabe 8

- 1  $G_1$  ist eine CH-2-Grammatik.
- 2 1. Schritt:

Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus  $V$  oder nur ein Symbol aus  $\Sigma$ .

$$S \rightarrow A \mid Y_a B \mid Y_a C$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Y_c A Y_d$$

$$B \rightarrow S \mid B Y_a \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow D \mid Y_c$$

$$D \rightarrow Y_d \mid Y_d D D$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_c \rightarrow c$$

$$Y_d \rightarrow d$$



## Aufgabe 8

2. Schritt:

Alle rechten Seiten haben Länge  $\leq 2$ .

$$S \rightarrow A \mid Y_a B \mid Y_a C$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Y_c C_1$$

$$B \rightarrow S \mid B Y_a \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow D \mid Y_c$$

$$D \rightarrow Y_d \mid Y_d C_2$$

$$C_1 \rightarrow A Y_d$$

$$C_2 \rightarrow D D$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_c \rightarrow c$$

$$Y_d \rightarrow d$$



## Aufgabe 8

### 3. Schritt:

Es kommen keine Regeln  $A \rightarrow \varepsilon$  vor. Berechne

$V' = \{A \in V \mid A \xrightarrow{*} \varepsilon\} = \{A, B, S\}$ . Wir streichen die Regel

$B \rightarrow \varepsilon$  und führen als neue Regeln  $S \rightarrow Y_a, B \rightarrow Y_a, C_1 \rightarrow Y_d$  ein.

$$S \rightarrow A \mid Y_a B \mid Y_a C \mid Y_a$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid Y_c C_1$$

$$B \rightarrow S \mid B Y_a \mid Y_a$$

$$C \rightarrow D \mid Y_c$$

$$D \rightarrow Y_d \mid Y_d C_2$$

$$C_1 \rightarrow A Y_d \mid Y_d$$

$$C_2 \rightarrow D D$$

$$Y_x \rightarrow x \quad // x = a, b, c$$



## Aufgabe 8

4. Schritt:

Ersetzung aller Kettenregeln  $A \rightarrow B$ .

Es gibt nur einen Kreis:  $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow S$  mit beteiligten Regeln  $S \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow S$ .

Diese Regeln werden gelöscht und alle Vorkommen von  $S, A, B$  in allen Regeln werden durch  $S$  ersetzt.

Wir erhalten die Regelmenge:



# Aufgabe 8

$$S \rightarrow S \mid Y_a S \mid Y_a C \mid Y_a$$

$$S \rightarrow S \mid C \mid Y_c C_1$$

$$S \rightarrow S \mid S Y_a \mid Y_a$$

$$C \rightarrow D \mid Y_c$$

$$D \rightarrow Y_d \mid Y_d C_2$$

$$C_1 \rightarrow S Y_d \mid Y_d$$

$$C_2 \rightarrow D D$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_c \rightarrow c$$

$$Y_d \rightarrow d$$



## Aufgabe 8

Nach Löschen aller Regeln der Form  $S \rightarrow S$  erhalten wir dann:

$$S \rightarrow Y_a S \mid Y_a C \mid Y_a \mid C \mid Y_c C_1 \mid S Y_a$$

$$C \rightarrow D \mid Y_c$$

$$D \rightarrow Y_d \mid Y_d C_2$$

$$C_1 \rightarrow S Y_d \mid Y_d$$

$$C_2 \rightarrow D D$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_c \rightarrow c$$

$$Y_d \rightarrow d$$



## Aufgabe 8

Topologisches Sortieren der verbleibenden an Kettenregeln beteiligten Variablen liefert z.B. die Reihenfolge der Variablen  $S, C, Y_a, D, C_1, Y_c, Y_d$ . Wir verarbeiten die Regeln in umgekehrter Reihenfolge und ersetzen Kettenregeln.



## Aufgabe 8

$$S \rightarrow Y_a S \mid Y_a C \mid a \mid d \mid Y_d C_2 \mid c \mid Y_c C_1 \mid S Y_a$$

$$C \rightarrow d \mid Y_d C_2 \mid c$$

$$D \rightarrow d \mid Y_d C_2$$

$$C_1 \rightarrow S Y_d \mid d$$

$$C_2 \rightarrow D D$$

$$Y_a \rightarrow a$$

$$Y_c \rightarrow c$$

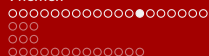
$$Y_d \rightarrow d$$

Diese Regelmengemenge ist in Chomsky-Normalform.



## Aufgabe 8

Zum Schluss müssen wir die Grammatik noch ergänzen durch die Regeln  $S' \rightarrow \varepsilon$  und  $S' \rightarrow S$  für ein neues Startsymbol  $S'$ , da die ursprüngliche Grammatik die Ableitung  $S \xrightarrow{*} \varepsilon$  zulässt.



## Aufgabe 9

Gegeben sei die Grammatik  $G_3 = (\Sigma, V, S, R)$  mit  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $V = \{A, B, S, X\}$ . Die Regelmengemenge  $R$  sei gegeben durch:

$$S \rightarrow AX \mid AB$$

$$X \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow a$$

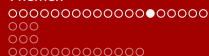
$$B \rightarrow b$$

- 1 Lässt sich der CYK-Algorithmus auf  $G_3$  anwenden? Begründe Deine Antwort.
- 2 Prüfe mithilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort  $aabb$  in  $L(G)$  liegt, nachdem  $G$  gegebenenfalls so angepasst wurde, dass der Algorithmus anwendbar ist.



## Aufgabe 9

- 1 Der CYK-Algorithmus lässt sich auf  $G_3$  anwenden, da  $G_3$  eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform ist.



## Aufgabe 9

- Der CYK-Algorithmus lässt sich auf  $G_3$  anwenden, da  $G_3$  eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform ist.
- Die Grammatik muss also nicht modifiziert werden. Die Mengen  $V_{ij}$  berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 V_{11} &= \{A\} & V_{12} &= \emptyset & V_{13} &= \emptyset & V_{14} &= \{S\} \\
 V_{22} &= \{A\} & V_{23} &= \{S\} & V_{24} &= \{X\} \\
 V_{33} &= \{B\} & V_{34} &= \emptyset \\
 V_{44} &= \{B\}
 \end{aligned}$$

$V_{24}$  etwa enthält  $X$ , weil  $G_3$  die Regel  $X \rightarrow SB$  enthält und  $S \in V_{23}$  sowie  $B \in V_{44}$  gilt. Da  $V_{14}$   $S$  enthält, ist das Wort in  $L(G_3)$ .



## Aufgabe 10

Gegeben sei die Grammatik  $G_4 = (\Sigma, V, S, R)$  mit  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, \cdot, /\}$  und  $V = \{S, Z\}$ .  $R$  sei durch die folgenden Ableitungsregeln in Chomsky-Normalform gegeben:

$$S \rightarrow S + S \mid S - S \mid S \cdot S \mid S/S \mid Z$$

$$Z \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 0Z \mid 1Z \mid 2Z \mid 3Z \mid 4Z \mid 5Z \mid 6Z$$

a)

Bestimme einen Ableitungsbaum des Wortes  $100 - 23 + 57/4$ . Ist die Grammatik eindeutig oder inhärent mehrdeutig? Begründe deine Antwort.



## Aufgabe 10

b)

Welchen Chomsky-Typ hat  $G_4$ , welchen  $L(G_4)$ ? Gib eine entsprechende Grammatik für  $L(G_4)$  an, falls sich die Chomsky-Typen von  $L(G_4)$  und  $G_4$  unterscheiden.

c)

Welchen Chomsky-Typ hat  $L(G_4)$ , wenn die erste Regel in  $R$  durch die Regel

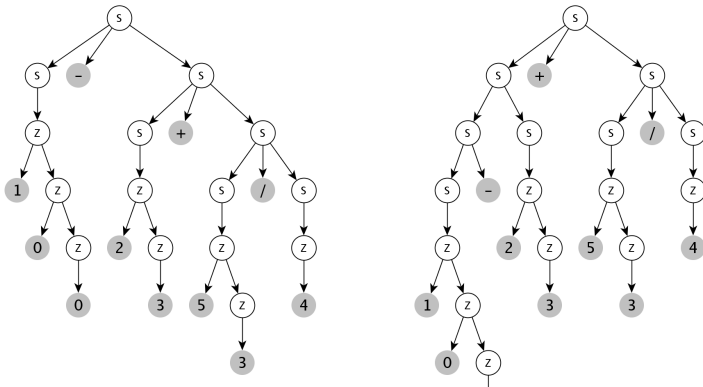
$$S \rightarrow (S + S) \mid (S - S) \mid S \cdot S \mid S/S \mid Z$$

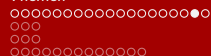
ersetzt wird? Begründe Deine Antwort.

# Aufgabe 10

a)

$G_4$  ist inhärent mehrdeutig, da es mehrere Syntaxbäume für das gegebene Wort gibt .





## Augabe 10

b)

$G_4$  ist eine Chomsky-2-Grammatik.  $L(G_4)$  ist allerdings eine reguläre Sprache, die auch durch die folgende (rechtslineare) Chomsky-3-Grammatik beschrieben wird.

$$S \rightarrow 0Z \mid 1Z \mid \dots \mid 9Z \mid 0S \mid 1S \mid \dots \mid 9S$$

$$Z \rightarrow +S \mid -S \mid \cdot S \mid /S \mid 0E \mid \dots \mid 9E$$

$$E \rightarrow \varepsilon$$



## Augabe 10

c)

Nach Ersetzung der ersten Regel ist  $L(G_4)$  nicht mehr regulär, da sich Ausdrücke mit korrekter Klammerstruktur wie z.B.

$((3 + 4) - 8) \cdot (1 + 2)$  bilden lassen. Die Sprache der korrekten Klammerausdrücke ist nicht regulär (siehe Übung). Die regulären Sprachen sind aber genau die Sprachen, für die es eine Chomsky-3-Grammatik gibt. Daher kann es für  $L(G_4)$  mit der modifizierten Grammatik keine Chomsky-3-Grammatik geben. Da  $L(G_4)$  durch eine Chomsky-2-Grammatik beschrieben wird, ist  $L(G_4)$  nach Modifikation von  $G_4$  also kontextfrei.



## Definition: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Für jede kontextfreie Sprache  $L$  gibt es eine Konstante  $n \in \mathbb{N}$ , so dass sich jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  so als  $z = uvwxy$  schreiben lässt, dass  $|vx| \geq 1$ ,  $|vwx| \leq n$  und für alle  $i \geq 0$  das Wort  $uv^iwx^iy \in L$  ist.



## Beispiel

Zeige mithilfe des Pumping-Lemmas, dass  $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$  nicht kontextfrei ist.



## Aufgabe 1

Zeige mithilfe des Pumping-Lemmas, dass  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \geq 1\}$  nicht kontextfrei ist.



## Definition: Ogden's Lemma

Für jede kontextfreie Sprache  $L$  gibt es eine Konstante  $n \in \mathbb{N}$ , so dass für jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  gilt: Wenn wir in  $z$  mindestens  $n$  Buchstaben **markieren**, so lässt sich  $z$  so als  $z = uvwxy$  schreiben, dass von den mindestens  $n$  markierten Buchstaben **mindestens einer zu  $vx$  gehört** und **höchstens  $n$  zu  $vw$  gehören** und **für alle  $i \geq 0$  das Wort  $uv^iwx^iy \in L$  ist.**



## Beispiel

Zeige, dass  $L = \{a^i b^j a^k \mid i \neq 0 \Rightarrow j = \max\{i, k\}\}$  nicht kontextfrei ist.



## Aufgabe 2

Zeige mithilfe von Ogden's Lemma, dass

$L = \{w0^i w \mid w \in \{0, 1\}^*, 0 \leq i\}$  nicht kontextfrei ist.



## Definition: Nutzlose Variablen

Sei  $G$  eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable  $A$  heisst **nutzlos**, falls es keine Ableitung  $S \xrightarrow{*} w$  gibt,  $w \in \Sigma^*$ , in der  $A$  vorkommt.



## Aufgabe 3

Enthält die folgende Grammatik  $G = (V, \Sigma, S, R)$  mit  $V = \{A, B, C, S\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $R = \{$

$$S \rightarrow AB|CA,$$

$$A \rightarrow a,$$

$$B \rightarrow BC|AB,$$

$$C \rightarrow aB|b$$

}

nutzlose Symbole?



Wie erkennen wir nutzlose Variablen?



Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 1 Berechnung von  $V' \subseteq V$  mit  $A \in V'$  genau dann wenn es  $w \in \Sigma$  gibt mit  $A \xrightarrow{*} w$ .



Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 1 Berechnung von  $V' \subseteq V$  mit  $A \in V'$  genau dann wenn es  $w \in \Sigma$  gibt mit  $A \xrightarrow{*} w$ .
  - Erstelle  $V' = \emptyset$  und eine Queue  $Q = \emptyset$ .



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 1 Berechnung von  $V' \subseteq V$  mit  $A \in V'$  genau dann wenn es  $w \in \Sigma$  gibt mit  $A \xrightarrow{*} w$ .
  - Erstelle  $V' = \emptyset$  und eine Queue  $Q = \emptyset$ .
  - Für alle  $A \in V$  mit  $A \rightarrow w, w \in \Sigma^*$ , setze  $Q = V' = V' \cup \{A\}$



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 1 Berechnung von  $V' \subseteq V$  mit  $A \in V'$  genau dann wenn es  $w \in \Sigma$  gibt mit  $A \xrightarrow{*} w$ .
  - Erstelle  $V' = \emptyset$  und eine Queue  $Q = \emptyset$ .
  - Für alle  $A \in V$  mit  $A \rightarrow w, w \in \Sigma^*$ , setze  $Q = V' = V' \cup \{A\}$
  - Für alle  $A \in Q$ :
    - Ersetze  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $B \rightarrow \alpha w \beta$  durch Anwenden der Regel  $A \rightarrow w; \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*, w \in \Sigma^*$ .



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 1 Berechnung von  $V' \subseteq V$  mit  $A \in V'$  genau dann wenn es  $w \in \Sigma$  gibt mit  $A \xrightarrow{*} w$ .
  - Erstelle  $V' = \emptyset$  und eine Queue  $Q = \emptyset$ .
  - Für alle  $A \in V$  mit  $A \rightarrow w, w \in \Sigma^*$ , setze  $Q = V' = V' \cup \{A\}$
  - Für alle  $A \in Q$ :
    - Ersetze  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $B \rightarrow \alpha w \beta$  durch Anwenden der Regel  $A \rightarrow w; \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*, w \in \Sigma^*$ .
    - Existiert nun  $B \rightarrow w'$  mit  $w' \in \Sigma^*$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 1 Berechnung von  $V' \subseteq V$  mit  $A \in V'$  genau dann wenn es  $w \in \Sigma$  gibt mit  $A \xrightarrow{*} w$ .
  - Erstelle  $V' = \emptyset$  und eine Queue  $Q = \emptyset$ .
  - Für alle  $A \in V$  mit  $A \rightarrow w, w \in \Sigma^*$ , setze  $Q = V' = V' \cup \{A\}$
  - Für alle  $A \in Q$ :
    - Ersetze  $B \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $B \rightarrow \alpha w \beta$  durch Anwenden der Regel  $A \rightarrow w; \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*, w \in \Sigma^*$ .
    - Existiert nun  $B \rightarrow w'$  mit  $w' \in \Sigma^*$ , füge  $B$  in  $Q$  und  $V'$  ein.
  - Wenn  $Q = \emptyset$ , dann weiter mit 2. Falls jedoch  $S \notin V'$ : alle Variablen nutzlos.



Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 2 Berechnung von  $V'' \subseteq V'$  aller  $A \in V'$ , für die es  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$  gibt, sodass eine Ableitung  $S \rightarrow \alpha A \beta$  existiert, oder  $A = S$ .



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- ② Berechnung von  $V'' \subseteq V'$  aller  $A \in V'$ , für die es  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$  gibt, sodass eine Ableitung  $S \rightarrow \alpha A \beta$  existiert, oder  $A = S$ .
  - Füge zu allen Regeln  $S \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ ,  $A \in V'$ ,  $A \neq S$  ein.



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 2 Berechnung von  $V'' \subseteq V'$  aller  $A \in V'$ , für die es  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$  gibt, sodass eine Ableitung  $S \rightarrow \alpha A \beta$  existiert, oder  $A = S$ .
  - Füge zu allen Regeln  $S \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ ,  $A \in V'$ ,  $A$  in  $V''$  ein.
  - Für jedes in  $V''$  eingefügte  $A$  mit  $A \rightarrow \alpha B \beta$ ,  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$  und  $B \in V'$  füge auch  $B$  in  $V''$  ein usw.



## Wie erkennen wir nutzlose Variablen?

- 2 Berechnung von  $V'' \subseteq V'$  aller  $A \in V'$ , für die es  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$  gibt, sodass eine Ableitung  $S \rightarrow \alpha A \beta$  existiert, oder  $A = S$ .
  - Füge zu allen Regeln  $S \rightarrow \alpha A \beta$  mit  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ ,  $A \in V'$ ,  $A$  in  $V''$  ein.
  - Für jedes in  $V''$  eingefügte  $A$  mit  $A \rightarrow \alpha B \beta$ ,  $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$  und  $B \in V'$  füge auch  $B$  in  $V''$  ein usw.
- 3  $V''$  sind die nützlichen Variablen



## Satz: Endlichkeit kontextfreier Grammatiken

Für eine kontextfreie Grammatik  $G$  kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob  $L(G)$  endlich ist.



## Aufgabe 4

Ist die von der Grammatik  $G = (V, \Sigma, S, R)$  mit  $V = \{A, B, C, S\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $R = \{$

$$S \rightarrow AB|CA,$$

$$A \rightarrow a,$$

$$B \rightarrow BC|AB,$$

$$C \rightarrow aB|b$$

}

erzeugte Sprache endlich? Begründe Deine Antwort.



Wie kann geprüft werden, ob  $G = (V, \Sigma, S, R)$  endlich ist?

- Nutzlose Variablen entfernen.



Wie kann geprüft werden, ob  $G = (V, \Sigma, S, R)$  endlich ist?

- Nutzlose Variablen entfernen.
- Chomsky-Normalform erzeugen



Wie kann geprüft werden, ob  $G = (V, \Sigma, S, R)$  endlich ist?

- Nutzlose Variablen entfernen.
- Chomsky-Normalform erzeugen
- Konstruiere Graph aus der Regelmenge
  - Knoten  $:= V$
  - Kante zwischen Knoten  $A, B$  genau dann, wenn es eine Produktion gibt mit  $A \rightarrow CB$  oder  $A \rightarrow BC$ ,  $A, B, C \in V$ .



Wie kann geprüft werden, ob  $G = (V, \Sigma, S, R)$  endlich ist?

- Nutzlose Variablen entfernen.
- Chomsky-Normalform erzeugen
- Konstruiere Graph aus der Regelmenge
  - Knoten  $:= V$
  - Kante zwischen Knoten  $A, B$  genau dann, wenn es eine Produktion gibt mit  $A \rightarrow CB$  oder  $A \rightarrow BC$ ,  $A, B, C \in V$ .
- Suche im Graph nach Kreisen, falls keine vorhanden  $\Rightarrow G$  ist endlich.



Warum muss man die nutzlosen Variablen entfernen, bevor man den Graph aufstellen kann?



Warum muss man die nutzlosen Variablen entfernen, bevor man den Graph aufstellen kann?

- es gibt keine Ableitungen, die die nutzlosen Variablen enthalten



Warum muss man die nutzlosen Variablen entfernen, bevor man den Graph aufstellen kann?

- es gibt keine Ableitungen, die die nutzlosen Variablen enthalten
- nutzlose Variablen können Kreise erzeugen (siehe obige Grammatik)



# Überraschungsaufgabe

Gegeben ist eine Schaltfunktion  $f(s_3, s_2, s_1, s_0)$ , die genau dann 1 ist, wenn die Dualzahl  $s_3s_2s_1s_0_2$  eine Primzahl ist.

Realisiere mit einem 3-MUX.

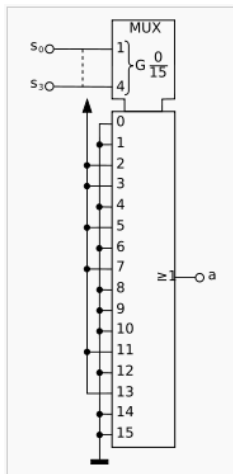
Das Problem ist dabei, dass die Funktion  $f$  vier Parameter hat, aber nur drei Steuersignale zur Verfügung stehen.



# 1. Wahrheitstafel von $f$ aufstellen

Dez	$s_3$	$s_2$	$s_1$	$s_0$	a
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

## 2. praktische Realisierung



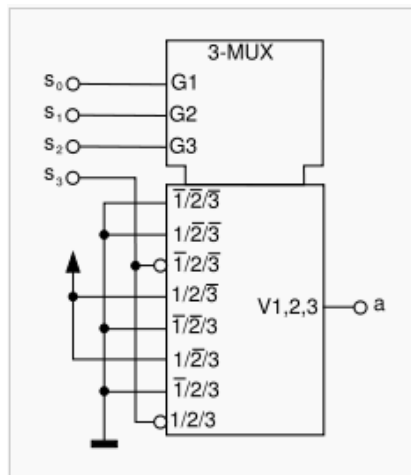


### 3. neue Wahrheitstafel aufstellen

$s_2$	$s_1$	$s_0$	a
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	$\bar{s}_3$
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	$\bar{s}_3$



## 4. Schaltbild





# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?



# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-/Odgen's-Lemma für kontextfreie Sprachen

# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-/Odgen's-Lemma für kontextfreie Sprachen
- nutzlose Variablen entfernen



# Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- Pumping-/Odgen's-Lemma für kontextfreie Sprachen
- nutzlose Variablen entfernen
- Entscheidbare Probleme für kontextfreie Sprachen



Noch Fragen?



# Vorschau



# Vorschau

- Kellerautomaten



# Vorschau

- Kellerautomaten
- evt. Klausurwiederholung, daher bitte konkrete Wünsche per Email!

# Bis zum nächsten Mal

