Informatik III - Tutorium XIII & XV (SR -107)

Tut Nr. 1 – DEAs, reguläre Ausdrücke, NEAs

David Münch

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Informatik
ITI Wagner

31. Oktober 2007

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Email: muenchdavid@gmail.com

https://www.stud.uni-karlsruhe.de/∼uhbro/

Tutorium 13: Mittwochs 8:00 Uhr - Raum -107
Tutorium 15: Mittwochs 9:45 Uhr - Raum -107

Übungsblattabgabe Donnerstags, aber Blatt 1 heute 16:00 Uhr.

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

- Definitionen selbst formulieren.

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

- Definitionen selbst formulieren.
- Aufgaben lösen.

Was wollen wir heute erreichen?

Zu DEAs, regulären Ausdrücken, NEAs wollen wir:

- Definitionen selbst formulieren.
- Aufgaben lösen.
- Zusammenhänge verstehen.

Definition: Formale Sprache

Definition: Formale Sprache

Eine Menge L von Wörtern über einem Alphabet Σ, d.h. $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **formale Sprache** über Σ.
Das leere Wort heisst ε ($|\varepsilon| = 0$). $\varepsilon \in \Sigma^*$ für alle Σ.

Definition: Formale Sprache

Eine Menge L von Wörtern über einem Alphabet Σ, d.h. $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **formale Sprache** über Σ.
Das leere Wort heisst ε ($|\varepsilon| = 0$). $\varepsilon \in \Sigma^*$ für alle Σ.

Beispiel:

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$L = \{w \in \Sigma^* | w \text{ prim}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$$

Definition: Sprachkonstruktionen

Definition: Sprachkonstruktionen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

- Produktsprache: $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

Definition: Sprachkonstruktionen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

- Produktsprache: $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
- k-faches Produkt:
  $L^k := \{w_1 \cdot w_2 \cdot ... \cdot w_k | w_i \in L, \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$

Definition: Sprachkonstruktionen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

- Produktsprache: $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
- k-faches Produkt:
  $L^k := \{w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k | w_i \in L, \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$
- Quotientensprache:
  $L_1 / L_2 := \{w \in \Sigma^* | \exists z \in L_2 \text{ mit } w \cdot z \in L_1\}$

Definition: Sprachkonstruktionen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

- Produktsprache: $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
- k-faches Produkt:
  $L^k := \{w_1 \cdot w_2 \cdot ... \cdot w_k | w_i \in L, \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$
- Quotientensprache:
  $L_1 / L_2 := \{w \in \Sigma^* | \exists z \in L_2 \text{ mit } w \cdot z \in L_1\}$
- Kleene'scher Abschluss: $L^* := \bigcup_{t \geq 0} L^i$

Definition: Sprachkonstruktionen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

- Produktsprache: $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
- k-faches Produkt:
  $L^k := \{w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k | w_i \in L,\text{ für } 1 \leq i \leq k\}$
- Quotientensprache:
  $L_1 / L_2 := \{w \in \Sigma^* | \exists z \in L_2 \text{ mit } w \cdot z \in L_1\}$
- Kleene'scher Abschluss: $L^* := \bigcup_{t \geq 0} L^i$
- positiver Abschluss: $L^+ := \bigcup_{t > 0} L^i$

Definition: Sprachkonstruktionen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

- Produktsprache: $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 | w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$
- k-faches Produkt:
  $L^k := \{w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_k | w_i \in L, \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$
- Quotientensprache:
  $L_1 / L_2 := \{w \in \Sigma^* | \exists z \in L_2 \text{ mit } w \cdot z \in L_1\}$
- Kleene'scher Abschluss: $L^* := \bigcup_{t \geq 0} L^i$
- positiver Abschluss: $L^+ := \bigcup_{t > 0} L^i$
- Komplementsprache: $L^c = \Sigma^* \backslash L$

Definition: DEA

Definition: DEA

Ein **deterministischer endlicher Automat M** wird spezifiert durch ein 5-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F).$$

Hierbei bezeichnet Q die Menge der **Zustände**
und Σ ist das **Eingabealphabet**, $Q \cap \Sigma = \emptyset$.
Z und Σ müssen - wie der Name sagt - endliche Mengen sein.
$s \in Q$ ist der **Startzustand**,
$F \subseteq Q$ ist die Menge der **Endzustände**
und $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ heisst die **Überführungsfunktion**.

Aufgabe

Entwerfe einen DEA, der alle durch 4 teilbaren Binärzahlen akzeptiert.

induktive Definition: Reguläre Ausdrücke

induktive Definition: Reguläre Ausdrücke

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck

induktive Definition: Reguläre Ausdrücke

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck

induktive Definition: Reguläre Ausdrücke

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ist ein regulärer Ausdruck

induktive Definition: Reguläre Ausdrücke

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ist ein regulärer Ausdruck
- Wenn α und β reguläre Ausdrücke, dann auch $\alpha\beta$, $(\alpha \cup \beta)$, sowie $(\alpha)^*$

induktive Definition: Reguläre Ausdrücke

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ist ein regulärer Ausdruck
- Wenn α und β reguläre Ausdrücke, dann auch $\alpha\beta$, $(\alpha \cup \beta)$, sowie $(\alpha)^*$

Beispiel:

$$(0 \cup (0 \cup 1)^* 00)$$

induktive Definition: Reguläre Sprache $L(\gamma)$

induktive Definition: Reguläre Sprache $L(\gamma)$

- Falls $\gamma = \emptyset$, so ist $L(\gamma) = \emptyset$

induktive Definition: Reguläre Sprache $L(\gamma)$

- Falls $\gamma = \emptyset$, so ist $L(\gamma) = \emptyset$
- Falls $\gamma = \varepsilon$, so ist $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$

induktive Definition: Reguläre Sprache $L(\gamma)$

- Falls $\gamma = \emptyset$, so ist $L(\gamma) = \emptyset$
- Falls $\gamma = \varepsilon$, so ist $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$
- Falls $\gamma = a$, so ist $L(\gamma) = \{a\}$

induktive Definition: Reguläre Sprache $L(\gamma)$

- Falls $\gamma = \emptyset$, so ist $L(\gamma) = \emptyset$
- Falls $\gamma = \varepsilon$, so ist $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$
- Falls $\gamma = a$, so ist $L(\gamma) = \{a\}$
- Falls $\gamma = \alpha\beta$, so ist $L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta)$

induktive Definition: Reguläre Sprache $L(\gamma)$

- Falls $\gamma = \emptyset$, so ist $L(\gamma) = \emptyset$
- Falls $\gamma = \varepsilon$, so ist $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$
- Falls $\gamma = a$, so ist $L(\gamma) = \{a\}$
- Falls $\gamma = \alpha\beta$, so ist $L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta)$

Beispiel:
Dem regulären Ausdruck $\gamma = (0 \cup (0 \cup 1)^* 00)$ ist die reg. Sprache $L(\gamma) = \{0 \text{ oder das Wort endet mit } 00\}$ zugeordnet.

Aufgabe 1

Formuliere einen regulären Ausdruck für folgende Sprache:
Die Menge der Zeichenketten über dem Alphabet $\{a, b, c\}$, die mindestens ein a und ein b enthalten.

Aufgabe 2

Formuliere einen regulären Ausdruck für folgende Sprache:
Die Menge aller Zeichenreihen aus Nullen und Einsen, derart, dass alle Paare aufeinander folgender Nullen vor allen Paaren aufeinanderfolgender Einsen stehen.

Aufgabe 3

Formuliere einen regulären Ausdruck für folgende Sprache:
Die Menge der Zeichenreihen aus Nullen und Einsen, deren Anzahl von Nullen durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 4

Formuliere einen regulären Ausdruck für folgende Sprache:
Die Menge aller Zeichenreihen aus Nullen und Einsen, deren Anzahl von Nullen durch 5 teilbar und deren Anzahl von Einsen gerade ist.

Satz: reg. Ausdrücke

Die Menge, der durch reguläre Ausdrücke beschreibbaren Sprachen, ist genau die Menge der regulären Sprachen.

Satz: reg. Ausdrücke

Die Menge, der durch reguläre Ausdrücke beschreibbaren Sprachen, ist genau die Menge der regulären Sprachen.

Satz: DEA $\Leftrightarrow$ reg. Sprache

Jede reguläre Sprache wird von einem DEA akzeptiert.
Jede durch DEAs erkennbare Sprache ist regulär.

Definition: NEA

Definition: NEA

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat M** wird spezifiert durch ein 5-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F).$$

Hierbei bezeichnet Q die Menge der **Zustände**
und Σ ist das **Eingabealphabet**, $Q \cap \Sigma = \emptyset$.
Z und Σ müssen - wie der Name sagt - endliche Mengen sein.
$s \in Q$ ist der **Startzustand**,
$F \subseteq Q$ ist die Menge der **Endzustände**
und $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ heisst die **Überführungsfunktion**.

Definition: ε-Übergänge beim NEA

Definition: ε-Übergänge beim NEA

Für einen Zustand $q \in Q$ ist der ε-Abschluss $E(q)$wie folgt definiert:
$E(q) := \{p \in Q | p$ ist von q durch eine Folge von ε-Übergängen erreichbar.$\}$

Aufgabe

Es ist folgender NEA M gegeben:

$M = (\{S, Z1, Z2, Z3\}, \{0, 1\}, \delta, S, \{2\})$ mit

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

$S \times \varepsilon \to \{Z1, Z2\}$

$Z1 \times 1 \to Z2$

$Z2 \times 0 \to Z3$

$Z2 \times 1 \to Z3$

$Z3 \times \varepsilon \to Z1$

Aufgabe

Es ist folgender NEA M gegeben:
$M = (\{S, Z1, Z2, Z3\}, \{0, 1\}, \delta, S, \{2\})$ mit
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
$S \times \varepsilon \to \{Z1, Z2\}$
$Z1 \times 1 \to Z2$
$Z2 \times 0 \to Z3$
$Z2 \times 1 \to Z3$
$Z3 \times \varepsilon \to Z1$
Sei L die Sprache, die von dem Automaten akzeptiert wird.
$01010 \in L$?
$1^n \in L \forall n \in \mathbb{N}_0$?
Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $(10)^m 01^m \in L$?

Satz: DEA $\Leftrightarrow$ NEA

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einem DEA akzeptierbar. Und umgekehrt.

Satz: DEA $\Leftrightarrow$ NEA

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einem DEA akzeptierbar. Und umgekehrt.

Satz: DEA $\Leftrightarrow$ NEA $\Leftrightarrow$ reg. Sprache

DEA, NEA und reg. Sprache sind äquivalent.

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- DEAs

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- DEAs
- NEAs und ϵ-Übergänge

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- DEAs
- NEAs und ϵ-Übergänge
- reguläre Ausdrücke, reguläre Sprache

Reflexion

Was haben wir heute gelernt?

- DEAs
- NEAs und ϵ-Übergänge
- reguläre Ausdrücke, reguläre Sprache
- Äquivalenz von DEA, NEA und reg. Sprachen

Noch Fragen?

Vorschau

Vorschau

- mehr zu NEAs

Vorschau

- mehr zu NEAs
- Vom NEA zum DEA

Vorschau

- mehr zu NEAs
- Vom NEA zum DEA
- Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Bis zum nächsten Mal