Tutorien-Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Probleme:

PARTITION:
Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\sum\limits_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum\limits_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i$?

BIN PACKING:
Gegeben: Eine Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und Objekte $a_1, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $a_i \in \mathbb{N}, a_i \leq b$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$
Gesucht: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überbeladen ist? (Das heißt: Existiert eine Abbildung $f : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., k\}$, sodass für alle $j \in \{1, ..., k\}$ gilt: $\sum\limits_{1 \leq i \leq k, f(i)=j} a_i \leq b$?)

1. Zeigen Sie, dass BIN PACKING $\mathcal{NP}$-hart ist, wobei PARTITION als $\mathcal{NP}$-vollständig vorausgesetzt werden darf!

2. Gegeben seien die Objekte der PARTITION-Probleminstanz $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 1, 2, 3, 4, 5)$. Zeigen oder widerlegen Sie, ob das transformierte und das ursprüngliche Problem eine Lösung besitzen!

Aufgabe 2

Gehen Sie bei dieser Aufgabe durchweg von der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ aus. Sie können Aussagen verwenden, die in Vorlesung oder Übung gezeigt/behandelt wurden.

1. **Problem:** 4-COLOR
   Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
   Gesucht: Gibt es eine Färbung der Knoten V, sodass je zwei durch eine Kante aus E miteinander verbundene Knoten unterschiedlich gefärbt sind, wenn nur vier unterschiedliche Farben zur Verfügung stehen?

   Zeigen Sie, dass 4-COLOR $\mathcal{NP}$-vollständig ist!
   Hinweis: Es kann hilfreich sein, wenn Sie die $\mathcal{NP}$- Vollständigkeit des Dreifärbbarkeitsproblems 3-COLOR verwenden.

2. Es ist bekannt, dass sowohl das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik SAT als auch 3-SAT, das Erfüllbarkeitsproblem mit Beschränkung auf Klauseln mit nur 3 Literalen, $\mathcal{NP}$-vollständig sind.
   Das Problem 3-CLIQUE ist wie folgt definiert:

   Problem: 3-CLIQUE
   Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
   Gesucht: Gibt es eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe 3 in G?

   Zeigen Sie, dass 3-CLIQUE **nicht** $\mathcal{NP}$-vollständig ist!

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist unter Schnittbildung abgeschlossen.

2. Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist unter Vereinigung abgeschlossen.

Dabei nehmen wir an, dass alle Sprachen über dem binären Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ definiert sind.

Lösung zu Aufgabe 1

1. Hierzu wird die Reduktion PARTITION$\leq_p$BIN PACKING benutzt:

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto \begin{cases} \text{Behältergröße:} & b := \sum_{i=1}^{n} a_i/2 \\ \text{Behälteranzahl:} & k := 2 \\ \text{Objekte:} & (a_1, ..., a_n) \end{cases}$$

   Falls eine Lösung des PARTITION-Problems existiert, dann gibt es nach Definition eine Teilmenge $J \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\sum_{1 \leq i \leq n, i \in J} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n, i \notin J} a_i$. Dann folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1\leq i\leq n, i\in J} a_i + \sum_{1\leq i\leq n, i\notin J} a_i = 2 * \sum_{1\leq i\leq n, i\in J} a_i \Rightarrow \sum_{1\leq i\leq n, i\in J} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i/2 = b = \sum_{1\leq i\leq n, i\notin J} a_i$$

   Man kann also die Objekte zur Indexmenge J in den ersten der beiden Behälter tun, der dann vollständig gefüllt ist, und die restlichen Objekte in den anderen Behälter. Diese Reduktion ist polynomial, ihr Aufwand ist $O(n)$.

2. Für die Objekte des BIN PACKING-Problems kann man eine Lösung finden, wenn man wie oben die Abbildung anwendet: $k = 2, b = \sum_{i=1}^{6} a_i/2 = (1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5)/2 = 8$. Somit ist das BIN PACKING-Problem mit der Indexmenge $J = \{1, 4, 5\}$ gelöst, denn $\sum_{1\leq i\leq n, i\in J} a_i = 1 + 3 + 4 = 8 = b$ und $\sum_{1\leq i\leq n, i\notin J} a_i = 1 + 2 + 5 = 8 = b$. Die ursprüngliche Probleminstanz für PARTITION besitzt damit auch eine Lösung, nämlich die Indexmenge J.

Lösung zu Aufgabe 2

1. Zunächst einmal macht man sich klar, dass 4-COLOR in $\mathcal{NP}$ liegt. Das ist der Fall, denn rät man eine Färbung der Knoten, dann ist die Korrektheit der Färbung in $O(|E|)$ Schritten verifizierbar, indem man schlicht über alle Kanten iteriert und überprüft, ob die Endknoten unterschiedlich gefärbt sind.
   4-COLOR ist $\mathcal{NP}$-hart, denn wir können 3-COLOR auf 4-COLOR reduzieren. Sei I eine Instanz von 3-COLOR mit $G = (V, E)$. Die Idee der Reduktion ist, einen weiteren Knoten zu V hinzuzufügen, der eine der 4 Farben von 4-COLOR zwingend "verbraucht", dass kein weiterer Knoten dieselbe Farbe haben darf. Dazu verbindet man ihn einfach mit allen Knoten in V. Die 4-COLOR Instanz I' hat also $G' = (V \cup \{v'\}, E \cup \{(v, v') \mid v \in V\})$. Ist G dreifärbbar, so behalten wir die Färbung der Knoten von G in G' bei und färben v' in der vierten Farbe, G' ist dann also vierfärbbar. Ist G' vierfärbbar, so hat kein anderer Knoten die selbe Farbe wie v', da v' mit allen anderen Knoten verbunden ist. Durch Entfernen von v' aus G' erhält man somit eine korrekte Dreifärbung von G, G ist also dreifärbbar.

2. Wir geben einen Algorithmus an, der 3-CLIQUE in Polynomialzeit entscheidet. Da wir in dieser Aufgabe von der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ausgehen, kann 3-CLIQUE nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sein, denn sonst wäre $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Das CLIQUE-Problem gehört zu den "fixed parameter tractable"- Problemen. Das heißt, ist die Größe einer Clique fest vorgegeben, in diesem Fall 3, so ist das zugehörige Entscheidungsproblem in Polynomialzeit lösbar. Der Algorithmus verfolgt dabei schlicht den Brute-Force-Ansatz: Man betrachtet alle Tripel von Knoten und testet, ob diese eine Dreierclique bilden. Ist nach durchlaufen aller Tripel eine Dreierclique gefunden, so gibt man als Ausgabe "JA" aus, ansonsten "NEIN". Es gibt insgesamt $\binom{|V|}{3}$ Tripel von Knoten, daher ist der Aufwand des Algorithmus im wesentlichen $O(\binom{|V|}{3}) = O(|V|^3)$, was polynomial in der Eingabe ist.

Lösung zu Aufgabe 3

1. Seien R_{L_1}, R_{L_2} die zu den $\mathcal{NP}$-Sprachen L_1, L_2 gehörenden, polynomiell entscheidbaren Zeugenrelationen. Dann ist

$$R_{L_1 \cap L_2} := \{(x, (w_1, w_2)) \mid (x, w_1) \in R_{L_1} \wedge (x, w_2) \in R_{L_2}\}$$

   eine zu $L_1 \cap L_2$ gehörende, polynomiell entscheidbare Zeugenrelation, denn es gilt:

$$\begin{aligned} x \in L_1 \cap L_2 &\Leftrightarrow x \in L_1 \wedge x \in L_2 \\ &\Leftrightarrow \exists\, w_1, w_2 : (x, w_1) \in R_{L_1} \wedge (x, w_2) \in R_{L_2} \\ &\Leftrightarrow \exists\, (w_1, w_2) : (x, (w_1, w_2)) \in R_{L_1 \cap L_2} \end{aligned}$$

2. Analog ist

$$R_{L_1 \cup L_2} := \{(x, (w_1, w_2)) \mid (x, w_1) \in R_{L_1} \vee (x, w_2) \in R_{L_2}\}$$

eine zu $L_1 \cup L_2$ gehörende, polynomiell entscheidbare Zeugenrelation, denn es gilt:

$$\begin{aligned} x \in L_1 \cup L_2 \quad &\Leftrightarrow x \in L_1 \vee x \in L_2 \\ &\Leftrightarrow \exists\, w_1, w_2 : (x, w_1) \in R_{L_1} \vee (x, w_2) \in R_{L_2} \\ &\Leftrightarrow \exists\, (w_1, w_2) : (x, (w_1, w_2)) \in R_{L_1 \cup L_2} \end{aligned}$$