Tutorien-Übungsblatt 7

Aufgabe 1

1. Beweisen Sie, dass $K(x)$ nicht berechenbar ist!
2. Beweisen Sie, dass die Menge der nichtkomprimierbaren Strings $\mathcal{L}$ nicht rekursiv aufzählbar ist!
3. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität von 0^n an!
4. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorow-Komplexität der Binärdarstellung der n-ten Primzahl p an!
5. Sei x ein Palindrom. Geben sie eine möglichst gute obere Schranke für $K(x)$ an!
6. Sei π_n die Kreiszahl π bis zur n-ten Nachkommastelle entwickelt. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für π_n an.

Aufgabe 2

Geben Sue für folgendende Formeln an ob diese in den besagten Theorien liegen

1. Ist $\phi_1 = \forall x \exists y \forall z : x + y = z$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?
2. Ist $\phi_2 = \forall x \exists y \forall z \exists w : (x + z = w) \wedge (x + y = w)$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?
3. Ist $\phi_3 = \forall x \forall y \forall z \forall w \forall v \exists s : \neg(x + w = y) \vee \neg(y + v = z) \vee (x + s = z)$ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$?
4. Sei $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ die Theorie der natürlichen Zahlen mit der Relation „echt kleiner“. Zeigen Sie: $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ ist entscheidbar.

Aufgabe 3

Geben Sie Modelle für die folgenden prädikatenlogischen Formeln an! Geben Sie dazu jeweils ein Universum $\mathcal{U}$ und eine Interpretation der Relationszeichen R_i an!

1. $$\begin{aligned} \phi_1 = \; & \forall\, x\ (R_1(x,x)) && \text{[K1.1]} \\ & \wedge \forall\, x, y\ (R_1(x,y) \leftrightarrow R_1(y,x)) && \text{[K1.2]} \\ & \wedge \forall\, x, y, z\ ((R_1(x,y) \wedge R_1(y,z)) \rightarrow R_1(x,z)) && \text{[K1.3]} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \phi_2 = \; & \phi_1 \\ & \wedge \forall\, x\ (R_1(x,x) \rightarrow \neg R_2(x,x)) && \text{[K2.1]} \\ & \wedge \forall\, x, y\ (\neg R_1(x,y) \rightarrow (R_2(x,y) \oplus R_2(y,x))) && \text{[K2.2]} \\ & \wedge \forall\, x, y, z\ ((R_2(x,y) \wedge R_2(y,z)) \rightarrow R_2(x,z)) && \text{[K2.3]} \\ & \wedge \forall\, x\ \exists\, y\ (R_2(x,y)) && \text{[K2.4]} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1

1. Annahme: $K(x)$ ist berechenbar
   Unter Verwendung des Rekursionstheorems läßt sich folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ konstruieren:
   1. Generiere eigene Darstellung $\langle\mathcal{M}\rangle$!
   2. Zähle alle Strings $x \in \{0,1\}^*$ auf und berechne $K(x)$!
      Falls $K(x) > |\langle\mathcal{M}\rangle|$, breche die Zählschleife ab!
   3. Schreibe x auf das Band!

   Damit ist $|\langle\mathcal{M}\rangle|$ kleiner als $K(x)$ und $\langle\mathcal{M}\rangle$ ist eine Beschreibung von x. Damit ist also $K(x)$ nicht die Länge der kleinsten Beschreibung. Widerspruch!

2. Annahme: $\mathcal{L}$ ist rekursiv aufzählbar
   Dann gibt es einen Aufzähler T für $\mathcal{L}$ und es läßt sich über das Rekursionstheorem folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ konstruieren:
   1. Generiere eigene Darstellung $\langle\mathcal{M}\rangle$!
   2. Verwende T, um die Strings in $\mathcal{L}$ aufzuzählen!
      Sobald ein aufgezählter String x länger ist als $|\langle\mathcal{M}\rangle|$, breche ab!
   3. Schreibe x auf das Band!

   Nun ist $\langle\mathcal{M}\rangle$ eine kürzere Beschreibung von x, also ist x damit komprimierbar. Widerspruch!

3. Eine obere Schranke ist $\log n + c$.
   Verwende Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Eingabe n in Binärdarstellung:
   1. Ersetze Binärdarstellung von n durch Unärdarstellung 0^n!
   Die Grösse c dieser Turingmaschine ist eine Konstante c die unabhängig von n ist.

4. Eine obere Schranke ist $\log n + c$.
   Verwende folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Eingabe n in Binärdarstellung:
   1. Zähle alle Primzahlen auf (z.B. Sieb des Eratosthenes) und lasse einen Zähler mitlaufen!
   2. Sobald der Zähler den Wert n erreicht, breche ab!
   3. Gib die aktuelle Primzahl p aus! Die Grösse c dieser Turingmaschine ist eine Konstante c die unabhängig von n ist.

5. Sei $|x| = n$. Eine obere Schranke für $K(x)$ ist $\frac{|x|}{2} + c$. Wir geben dazu eine Maschine $\mathcal{M}$ an die x bei Eingabe der ersten Worthälfte x_1 erzeugt.
   1. Falls x ein Palindrom ungerader Länge ist, dann schreibe $x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ auf das Band hinter x_1
   2. Spiegle x_1^R auf das Band hinter den Bandinhalt
   Die Grösse c dieser Turingmaschine ist eine Konstante c die unabhängig von n ist.

6. Eine obere Schranke für $K(\pi_n)$ ist auch hier $\log(n) + c$. Man kann die Binärentwicklung von π zum Beispiel anhand der BPP-Folge berechnen.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Man summiert einfach solange auf bis sich die n-te Stelle nicht mehr ändert und bricht dann ab. Die Grösse einer Turingmaschine die dies berechnet ist eine Konstante c und unabhängig von n.

Lösung zu Aufgabe 2

1. Nein. Wähle irgend ein $x \in \mathbb{N}$. Dann setze $z = x + y + 1$. Somit gilt für jede mögliche Wahl von z: $x + y \neq x + y + 1 = z$ womit ϕ_1 keine „Wahrheit“ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$ ist.

2. Nein. Wähle dazu $x \in \mathbb{N}$ beliebig und $z = y+1$. Wäre ϕ_2 in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$, so würde gelten $w = x+z = x+y+1 = w+1$ was ein Widerspruch ist.

3. Ja. Wähle dazu $s = w + v$. Gilt $\neg(x + w = y)$ oder $\neg(y + v = z)$ dann ist ϕ_3 trivialerweise wahr. Nehmen wir also an $(x + w = y) \wedge (y + v = z)$. Dann gilt $x + s = x + w + v = y + v = z$ womit ϕ_3 auch in diesem Falle wahr ist.

4. Wir reduzieren dazu das „Wortproblem“ von $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ auf das Wortproblem von $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$. Sei ϕ eine Formel über $(\mathbb{N}, <)$. Für alle Auftreten von Teilformeln $x < y$ für beliebige x, y in ϕ ersetzen wir $x < y$ durch $\exists z \exists w : (x + z = y) \wedge (1 + w = z)$ mit ungebundenen Variablen z und w. Es ist offensichtlich dass nun $x < y$ falls $\exists z \exists w : (x + z = y) \wedge (1 + w = z)$ gilt. Wir erhalten also eine neue Formel ϕ' die genau dann in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$ liegt falls ϕ in $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, <)$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 3

Für das Universum $\mathcal{U}$ ziehen wir die klassischen Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ in Betracht und suchen unter den Standardrelationen $=, \leq, \geq, <, >, \neq$ nach geeigneten Kandidaten zur Interpretation der Relationszeichen R_i.

1. Die einzelnen Klauseln erlauben jeweils folgende Relationen für R_1:
   Klausel [K1.1]: $=, \leq, \geq$
   Klausel [K1.2]: $=, \neq$
   Klausel [K1.3]: $=, \leq, \geq, <, >$
   Da nur $=$ als einzige Äquivalenzrelation alle drei Klauseln erfüllt, sind die folgenden Tupel $(\mathcal{U}, R_1)$ mögliche Modelle:
   $(\mathbb{N}, =), (\mathbb{N}_0, =), (\mathbb{Z}, =), (\mathbb{Q}, =), (\mathbb{R}, =), (\mathbb{C}, =)$

2. Da hier R_1 durch ϕ_1 auf die Relation $=$ festgelegt ist, erlauben die zusätzlichen Klauseln jeweils folgende Relationen für R_2:
   Klausel [K2.1]: $<, >, \neq$
   Klausel [K2.2]: $\leq, \geq, <, >$
   Klausel [K2.3]: $=, \leq, \geq, <, >$
   Klausel [K2.4]: $=, \leq, \geq, <, >$ (außer für $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$), $\neq$
   Da nur $<$ und mit Einschränkungen auch $>$ die vier neuen Klauseln erfüllen, sind die folgenden Tupel $(\mathcal{U}, R_1, R_2)$ mögliche Modelle:
   $(\mathbb{N}, =, <), (\mathbb{N}_0, =, <), (\mathbb{Z}, =, <), (\mathbb{Q}, =, <), (\mathbb{R}, =, <), (\mathbb{C}, =, <), (\mathbb{Z}, =, >), (\mathbb{Q}, =, >), (\mathbb{R}, =, >), (\mathbb{C}, =, >)$