Tutorien-Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L} = \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \text{Turingmaschine } \mathcal{M} \text{ hat mindestens einen unerreichbaren Zustand}\}$ nicht entscheidbar ist!

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass es eine Gödelnummer $n = \langle\mathcal{M}\rangle \in \mathbb{N}_0$ zu einer Turingmaschine $\mathcal{M}$ gibt, die die Funktion $f_n(x) = (n+x)^2$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ berechnet!

Aufgabe 3

Welche der folgenden Mengen sind rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Aussage!

1. $M_1 := \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q < 1\}$
2. $M_2 := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$

Aufgabe 4

Sei $A \subseteq \mathbb{N}_0$ eine entscheidbare Menge. Zeigen Sie, dass $B := \{x + 2y^2 + 17 + 11^x \mid x, y \in A\}$ entscheidbar ist!

Lösung zu Aufgabe 1

Beweis: Es gilt: $\mathcal{L}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ $\bar{\mathcal{L}}$ entscheidbar
Zeige also die Reduktion HALT $\leq_m \bar{\mathcal{L}} = \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \text{Turingmaschine } \mathcal{M} \text{ hat keinen unerreichbaren Zustand}\}$!
Konstruiere dazu aus einer Instanz $(\langle\mathcal{M}\rangle, w) \in$ HALT, also aus der Turingmaschine $\mathcal{M}$ und deren Eingabe w, eine neue Turingmaschine $\mathcal{M}'$:
1. Leere das Band
2. Schreibe w auf das Band
3. Simuliere $\mathcal{M}$
4. Gehe in einen speziellen Zustand q_S

Dabei hat $\mathcal{M}'$ bezüglich der Schritte 1. bis 3. keine unerreichbaren Zustände, der einzige potentiell unerreichbare Zustand ist also q_S.

Sei nun $f : \text{HALT} \to \bar{\mathcal{L}}, (\langle\mathcal{M}\rangle, w) \mapsto \langle\mathcal{M}'\rangle$ die totale und berechenbare Funktion, die die Reduktion nach der obigen Beschreibung liefert. Dann gilt:

$(\langle\mathcal{M}\rangle, w) \in$ HALT $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ hält bei der Eingabe von w $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ erreicht den Zustand q_S $\Leftrightarrow$
$\mathcal{M}'$ hat keinen unerreichbaren Zustand $\Leftrightarrow \langle\mathcal{M}'\rangle = f((\langle\mathcal{M}\rangle, w)) \in \bar{\mathcal{L}}$

Damit ergibt sich aus der Annahme, dass $\bar{\mathcal{L}}$ berechenbar ist, direkt, dass auch HALT berechenbar ist. Dies ist aber ein Widerspruch, da HALT als nicht berechenbar bekannt ist. Damit kann also $\bar{\mathcal{L}}$ und damit auch $\mathcal{L}$ nicht berechenbar sein.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir wenden das Rekursionstheorem auf folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ an, welche eine Eingabe x erhält:

1. Hole eigene Beschreibung $n = \langle\mathcal{M}\rangle$
2. Berechne $y = n + x$
3. Berechne $z = y^2$
4. Gib z aus

Sei $n = \langle\mathcal{M}'\rangle$ die Gödelnummer von $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ berechnet also die Funktion $f_n(x) = (n + x)^2$.

Lösung zu Aufgabe 3

1. Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass es berechenbare Bijektionen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0^2$ gibt. Sei f eine beliebige, aber feste derartige Bijektion. Seien $\kappa_1 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (n_1, n_2) \mapsto n_1$ und $\kappa_2 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, (n_1, n_2) \mapsto n_2$ die ebenfalls berechenbaren Projektionen.

   Betrachte nun die Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}$ mit
   $$g(x) := \begin{cases} \frac{\kappa_1(f(x))}{\kappa_2(f(x))} & , \text{ falls } 0 < \kappa_1(f(x)) < \kappa_2(f(x)) \\ \frac{1}{2} & , \text{ sonst} \end{cases}$$
   g ist berechenbar und es gilt $\text{Bild}(g) = M_1$, also ist M_1 rekursiv aufzählbar.

2. Annahme: M_2 ist rekursiv aufzählbar
   Da $M_2 \neq \varnothing$ gilt, gibt es eine totale und berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $\text{Bild}(f) = M_2$.
   Seien dann $f(0) = 0, a_{00}a_{01}...$, $f(1) = 0, a_{10}a_{11}...$, usw., wobei also a_{ij} die Ziffer der Nachkommastelle mit dem Positionsindex j zu $f(i)$ bezeichnet.

   Konstruiere $b := 0, b_1 b_2...$ mit
   $$b_i := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } a_{ii} \neq 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$
   Dann gilt $b \in M_2$, es muss also eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ geben mit $f(n) = b$. Daraus folgt:
   $b_n = 1 \Leftrightarrow a_{nn} = b_n \neq 1$
   Dies ist ein Widerpruch, damit ist M_2 nicht rekursiv aufzählbar.

Lösung zu Aufgabe 4

Da die Funktion $x + 2y^2 + 17 + 11^x$ streng monoton wachsend ist und zudem $A \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt, folgt somit:
$z \in B \Leftrightarrow \exists\, x, y \in A : 0 \leq x \leq z \wedge 0 \leq y \leq z \wedge z = x + 2y^2 + 17 + 11^x$
Da A entscheidbar ist, ist damit ihre charakteristische Funktion χ_A berechenbar.

Betrachte nun folgende Mehrband-Turingmschine, die auf dem ersten Band die Eingabe z enthält:
1. Initialisiere x auf dem zweiten Band und y auf dem dritten Band mit 0
2. Berechne auf weiteren Bändern $\chi_A(x)$, $\chi_A(y)$ und $x + 2y^2 + 17 + 11^x$
3. Prüfe, ob $\chi_A(x) = 1 \wedge \chi_A(y) = 1 \wedge x + 2y^2 + 17 + 11^x = z$ gilt:
- Falls ja: Ersetze z auf dem ersten Band durch eine 1 und stoppe
- Falls nein: Gehe zu Schritt 4.
4. Erhöhe y um 1 und prüfe, ob $y \leq z$ gilt:
- Falls ja: Gehe zu Schritt 2.
- Falls nein: Setze y auf 0 zurück und gehe zu Schritt 5.
5. Erhöhe x um 1 und prüfe, ob $x \leq z$ gilt:
- Falls ja: Gehe zu Schritt 2.
- Falls nein: Ersetze z auf dem ersten Band durch eine 0 und stoppe

Die Turingmaschine berechnet die charakteristische Funktion χ_B und ist wie jede Mehrband-Turingmschine durch eine Einband-Turingmschine simulierbar. Wichtig ist dabei, dass alle Einzelschritte berechenbar sind. Dafür wird die Berechenbarkeit von χ_A benötigt. Zudem wird als bekannt vorausgesetzt, dass die diskrete Arithmetik auf $\mathbb{N}_0$ und damit der Term $x + 2y^2 + 17 + 11^x$ berechenbar ist.