Tutorien-Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Grammatik $\mathcal{G} = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, S, \mathcal{P})$ mit
$\mathcal{P} = \{S \to aABcb \mid aBC \mid CBABc,$
$aA \to BCaAa \mid bb,$
$BC \to CB,$
$B \to aCaa \mid babAcc,$
$aCa \to aAc \mid aca\}.$

Lösen Sie das Wortproblem anhand des in der Vorlesung angegebenen Algorithmus für das Wort $w = acbbca$!

Aufgabe 2

Geben Sie, sofern möglich, je eine Lösung für die folgenden Post-Systeme an! Begründen Sie gegebenenfalls, warum es keine Lösung geben kann!

1. $$\{\binom{aa}{a}, \binom{b}{aa}, \binom{a}{aab}\}$$

2. $$\{\binom{01}{0}, \binom{0}{101}, \binom{101}{0}\}$$

Aufgabe 3

Geben Sie für die nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ jeweils eine Turingmaschine an, die die entsprechende Sprache akzeptiert!

1. $\mathcal{L} = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega$ enthält das Zeichen 0 gleich oft wie das Zeichen $1\}$
2. $\mathcal{L}' = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega$ enthält das Zeichen 0 doppelt so oft wie das Zeichen $1\}$
3. $\mathcal{L}'' = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega$ enthält das Zeichen 0 nicht doppelt so oft wie das Zeichen $1\}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L} = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid$ Turingmaschine $\mathcal{M}$ akzeptiert jede Eingabe$\}$ nicht entscheidbar ist!

Lösung zu Aufgabe 1

Mit $|\omega| = 6$ ergibt die Anwendung des Algorithmus für kontextfreie Grammatiken folgende Tabelle:

Durchlauf	$\mathcal{M}$
0	$\mathcal{M}_0 := \{S\}$
1	$\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_0 \cup \{aABcb, aBC, CBABc\}$
2	$\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}_1 \cup \{bbBcb, aCB, aaCaaC\}$
3	$\mathcal{M}_3 := \mathcal{M}_2 \cup \{aCaCaa, aaAcaC, aacaaC\}$
4	$\mathcal{M}_4 := \mathcal{M}_3 \cup \{abbcaC, aAcCaa, acaCaa, aCaAca, aCacaa\}$
5	$\mathcal{M}_5 := \mathcal{M}_4 \cup \{bbcCaa, aCbbca, acaAca, acacaa, aAcAca, aAccaa\}$
6	$\mathcal{M}_6 := \mathcal{M}_5 \cup \{acbbca, ...\}$ bzw. $\mathcal{M}_6 := \mathcal{M}_5 \cup \{acbbca, bbcAca, bbccaa\}$
7	$\mathcal{M}_7 := \mathcal{M}_6 \cup \varnothing$

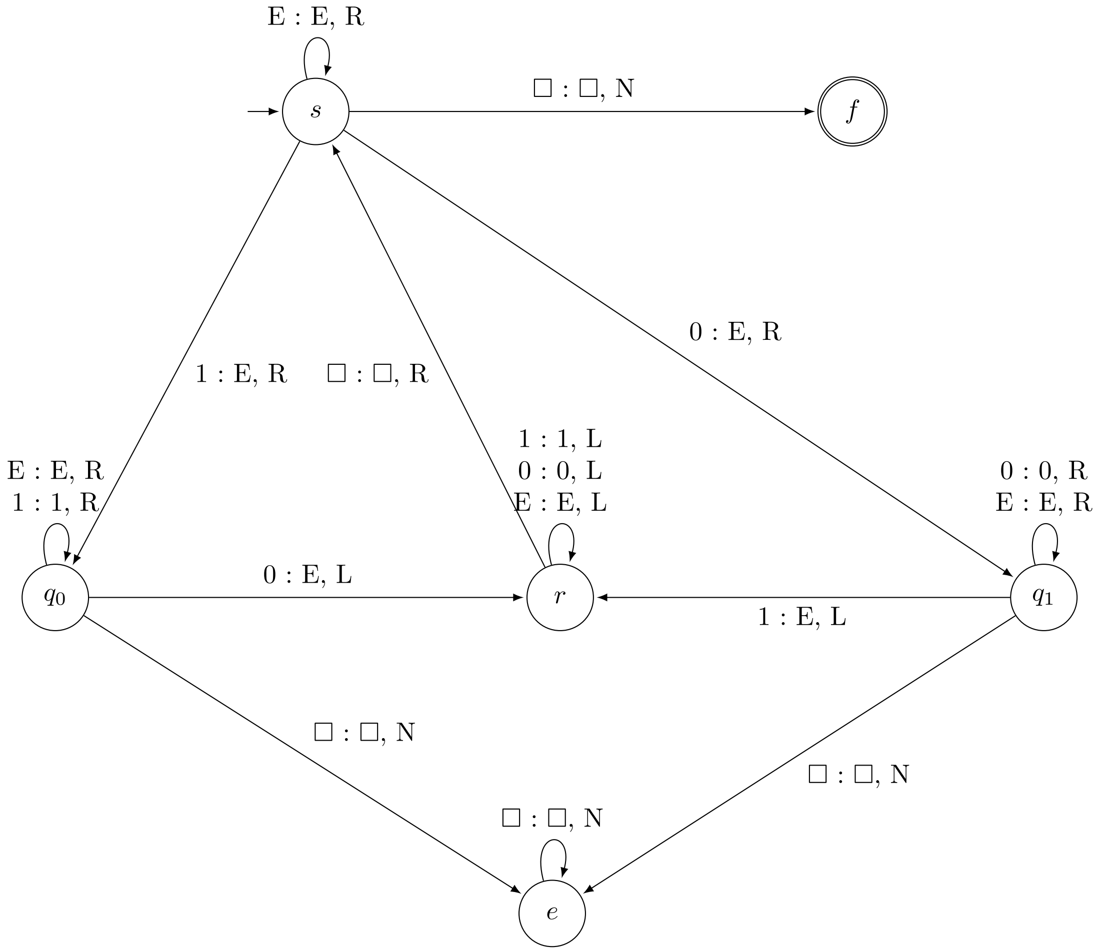
$acbbca \in \mathcal{M}_6 \Rightarrow acbbca \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$

Lösung zu Aufgabe 2

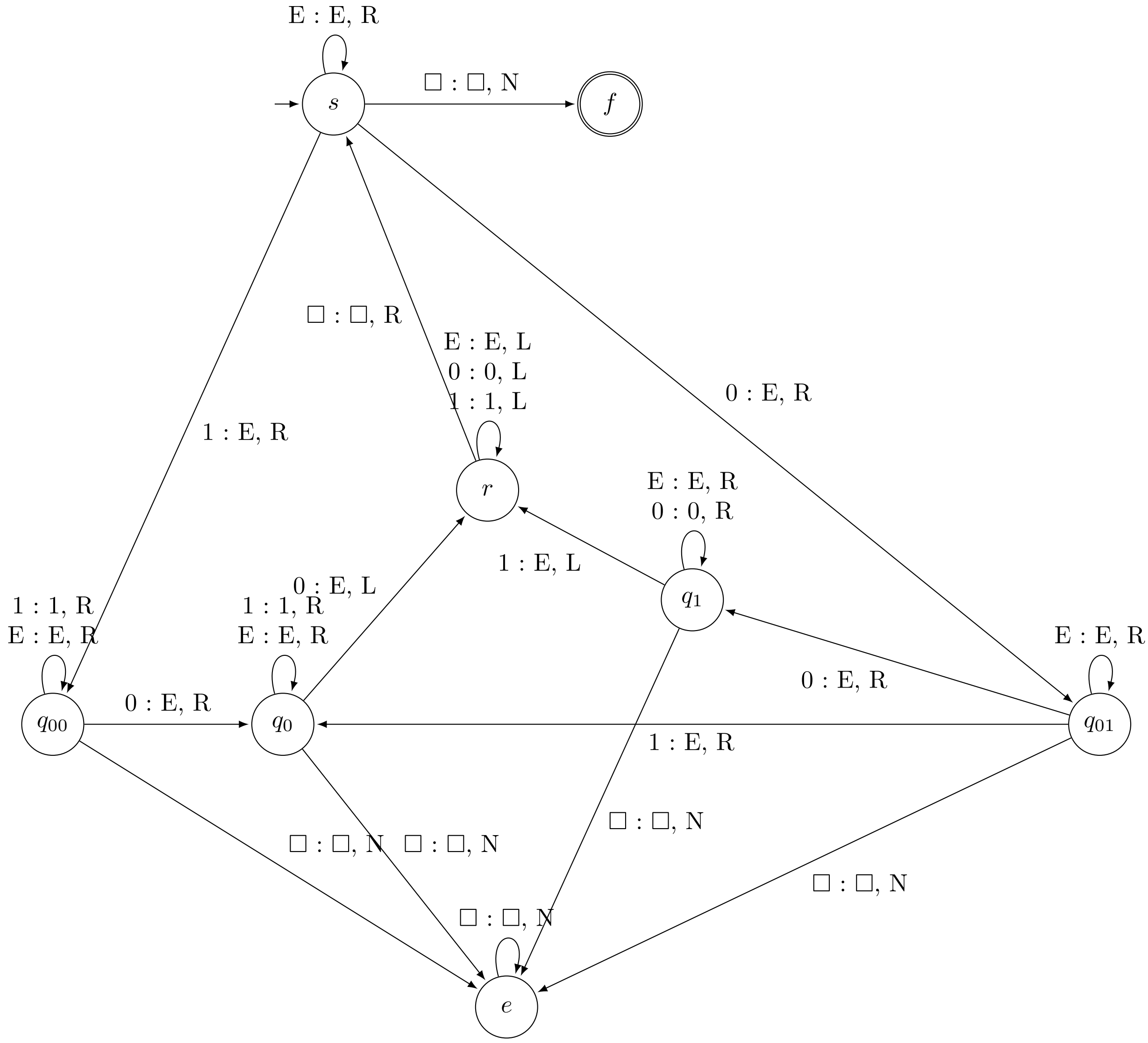
1. Die kürzeste Lösung ist $(1, 3, 2, 1, 1)$, welche das Lösungswort *aaabaaaa* erzeugt.
2. Jede Lösung muß mit einem Wortpaar enden, bei dem das obere und das untere Wort auf dem gleichen Zeichen enden oder bei dem eines von den beiden Wörtern das leere Wort ist. Beides ist hier nicht der Fall, weswegen keine Lösung existieren kann.

Lösung zu Aufgabe 3

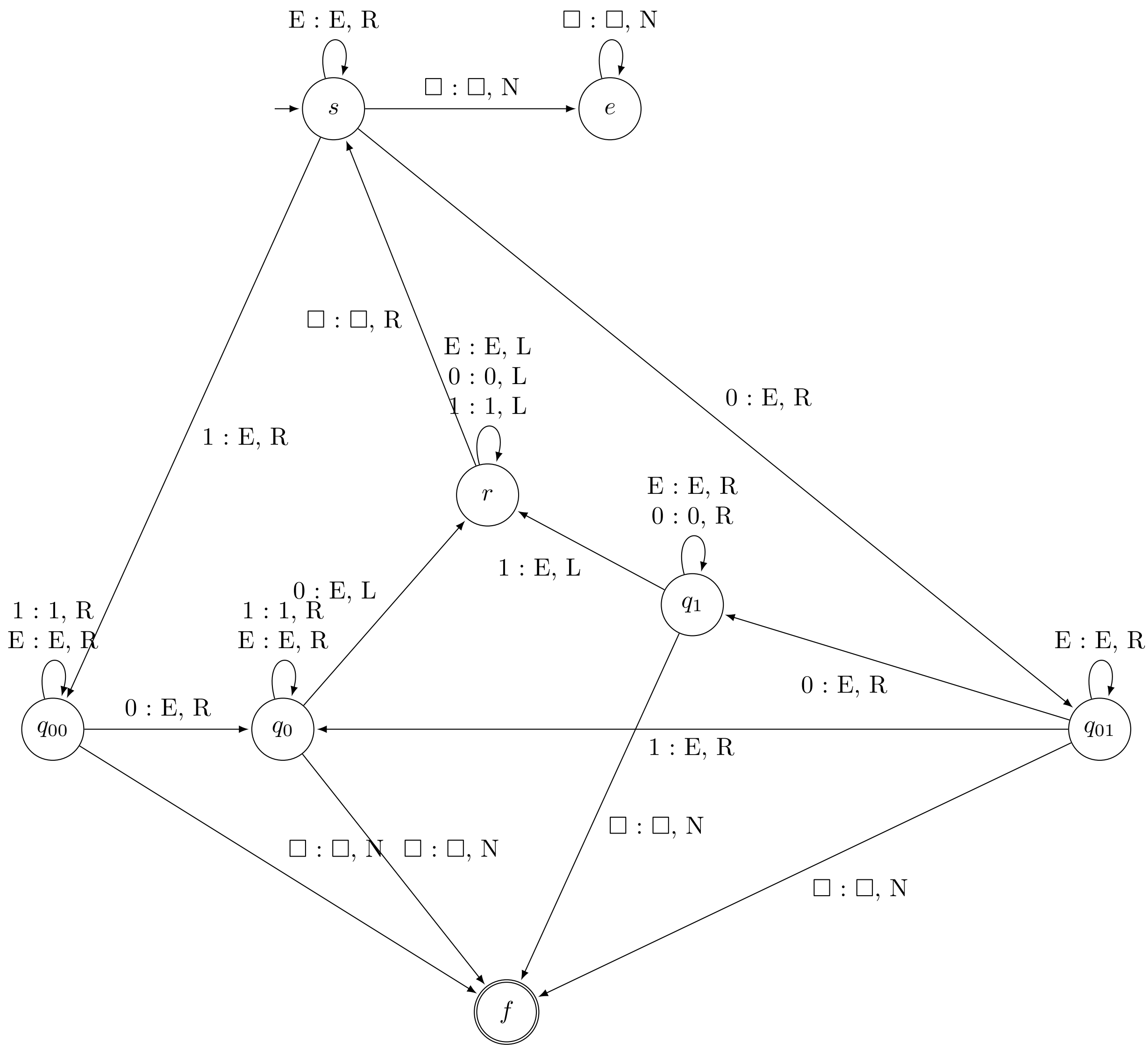
1. Turingmaschine zu $\mathcal{L}$:



2. Turingmaschine zu $\mathcal{L}'$:



3. Turingmaschine zu $\mathcal{L}''$:



Es wurden im Vergleich zur vorherigen Turingmaschine nur die Zustände f und e vertauscht!

Lösung zu Aufgabe 4

<u>Beweis:</u> Zeige die Reduktion HALT $\leq \mathcal{L}$!
Konstruiere dazu aus einer Instanz $(\langle\mathcal{M}\rangle, w) \in$ HALT, also aus der Turingmaschine $\mathcal{M}$ und deren Eingabe w, eine neue Turingmaschine $\mathcal{M}'$:
- Leere das Band
- Schreibe w auf das Band
- Simuliere $\mathcal{M}$
- Gehe in einen akzeptierenden Zustand

Sei nun $f : \text{HALT} \to \mathcal{L}, (\langle\mathcal{M}\rangle, w) \mapsto \langle\mathcal{M}'\rangle$ die totale und berechenbare Funktion, die die Reduktion nach der obigen Beschreibung liefert. Dann gilt:

$(\langle\mathcal{M}\rangle, w) \in$ HALT $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ hält bei der Eingabe von w $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ akzeptiert jede Eingabe $\Leftrightarrow$
$\langle\mathcal{M}'\rangle = f((\langle\mathcal{M}\rangle, w)) \in \mathcal{L}$

Damit ergibt sich aus der Annahme, dass $\mathcal{L}$ berechenbar ist, direkt, dass auch HALT berechenbar ist. Dies ist aber ein Widerspruch, da HALT als nicht berechenbar bekannt ist. Damit kann also $\mathcal{L}$ nicht berechenbar sein.