Tutorien-Übungsblatt 4

Aufgabe 1

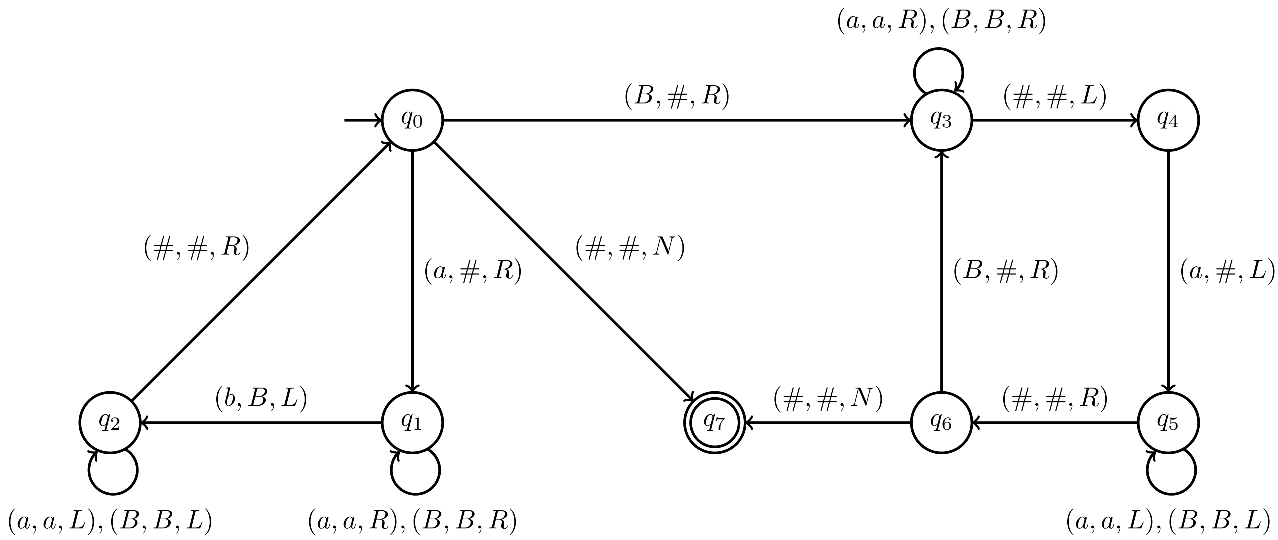
1. Geben Sie für die Sprache $\mathcal{L} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Grammatik des höchstmöglichen Chomsky-Typs an!
2. Geben Sie für die Sprache $\mathcal{L}' = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine linear beschränkte Turing-Maschine an und zeichnen Sie diese Turing-Maschine auch als Graphen!
3. Prüfen Sie, ob Ihre Turing-Maschine $aaaa$ als Eingabe akzeptiert! Prüfen Sie auch nach, ob aaa nicht akzeptiert wird!
4. Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}'$ nicht kontextfrei ist!

Aufgabe 2

1. Eine nichtdeterministische Turingmaschine ist ein Tupel $\mathcal{TM} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, \mathcal{F})$ mit dem Eingabealphabet Σ, dem Bandalphabet $\Gamma \supseteq \Sigma$, dem Bandzeichen $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$, der Zustandsmenge $\mathcal{Q}$, den Finalzuständen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}$ und dem Startzustand $q_0 \in \mathcal{Q}$. Da $\mathcal{TM}$ nichtdeterministisch ist, ist δ keine Zustandsübergangsfunktion, sondern eine zustandsüberführende Relation $\delta \subseteq (\mathcal{Q} \times \Gamma) \times (\mathcal{Q} \times \Gamma \times \{L, N, R\})$. Dabei schreiben wir $\delta(q_1, X) = (q_2, Y, D)$, falls es ein Tupel $((q_1, X), (q_2, Y, D))$ in δ gibt, d.h. falls wir in einem Zustand q_1 vom Band das Zeichen X lesen und wir die Maschine in Zustand q_2 überführen, das Zeichen Y schreiben und den Lese-/Schreibkopf in Richtung $D \in \{L, N, R\}$ (also entweder nach links, nicht oder nach rechts) bewegen dürfen.

   Geben Sie nun eine nichtdeterministische Turingmaschine an, welche die Sprache $\mathcal{L} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ erkennt! Es genügt dabei, den Zustandsübergangsgraphen zu zeichnen und das verwendete Bandalphabet anzugeben.

2. Gegeben sei folgende deterministische Turingmaschine $\mathcal{TM} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, \mathcal{F})$, wobei $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \#\}$, den Zuständen $\mathcal{Q} = \{q_0, \ldots, q_7\}$, dem Startzustand q_0, den Finalzuständen $\mathcal{F} = \{q_7\}$ und dem Bandzeichen $\#$. Der Zustandsübergangsgraph ist gegeben durch:



   Dabei sind die Kanten des Graphen so zu lesen, dass eine Kante von Zustand q_i nach q_j mit der Kantenbeschriftung "(a, b, d)" den Übergang $\delta(q_i, a) = (q_j, b, d)$ darstellt. Falls es für einen gegebenen Zustand und ein gegebenes Symbol keinen Zustandsübergang gibt, bricht die Maschine die Berechnung ab.

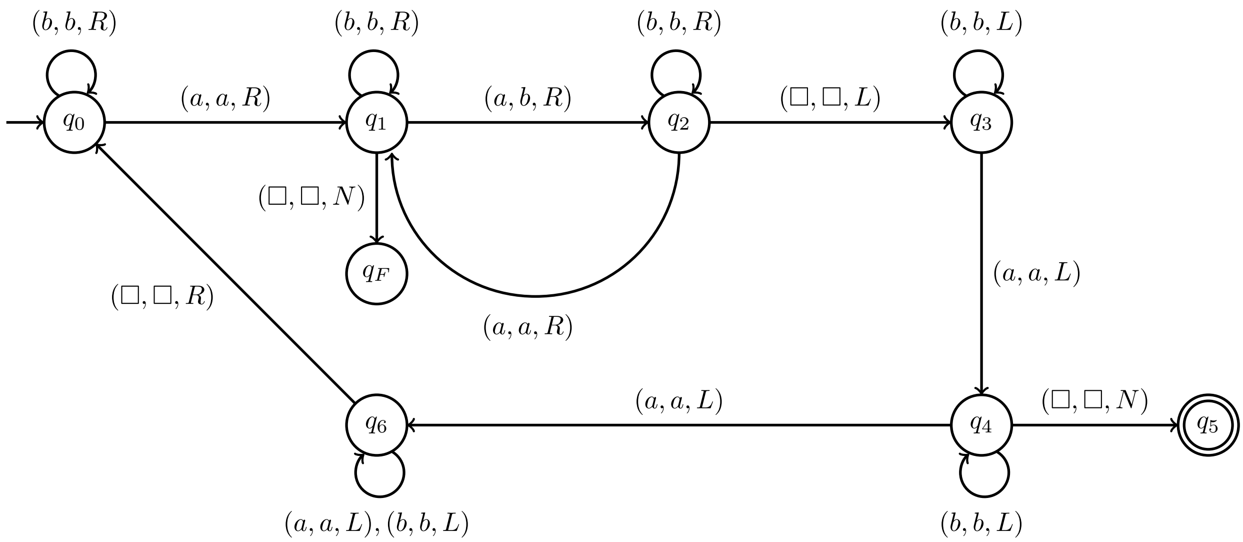
   Finden Sie die Sprache, die von der Turingmaschine $\mathcal{TM}$ akzeptiert wird!

Lösung zu Aufgabe 1

1. Eine mögliche Grammatik ist: $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit
$\mathcal{T} := \{a, b, c\}$, $\mathcal{V} := \{S, X, Y\}$ und
$\mathcal{P} := \{S \to aSXY \mid abY, YX \to XY, bX \to bb, bY \to bc, cY \to cc\}$
Die gegebene Grammatik ist kontextsensitiv, also von Chomsky-Typ 1.

   Behauptung: $\mathcal{L}$ nicht kontextfrei
   Beweis: Verwendung der Kontraposition des Pumping Lemmas
   Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig.
   Wähle $\omega \in \mathcal{L}$ geeignet mit $|\omega| \geq n_0$, wähle also beispielsweise $\omega = a^{n_0}b^{n_0}c^{n_0}$. $\Rightarrow$
   $\forall\, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \{a, b, c\}^*, \omega = \alpha\beta\gamma\delta\epsilon, |\beta\delta| \geq 1, |\beta\gamma\delta| \leq n_0 :$ β und δ enthalten gemeinsam niemals alle 3 Zeichen.
   Dann gilt $\alpha\gamma\epsilon \notin \mathcal{L}$ wegen $|\beta\delta| \geq 1$. $\Rightarrow \mathcal{L}$ nicht kontextfrei

2. Eine mögliche linear beschränkte Turing-Maschine ist:
$M := (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_F\}, \{a\}, \{a, b, \Box\}, \delta, \Box, q_0, \{q_5\})$,
wobei δ im folgenden Graphen gegeben ist:



   Idee: Die Anzahl der a solange halbieren, bis entweder ein Rest übrig bleibt oder nur noch ein a da ist (also von $\frac{2}{2} = 1$).

   In q_1 ist die Anzahl der a ungerade, deshalb wird in den Fehlerzustand q_F gewechselt, falls die Eingabe zu Ende ist. In q_2 ist die Anzahl der a gerade und beim Übergang zwischen q_1 und q_2 wird jedes zweite a durch ein b ersetzt also die Anzahl der a halbiert. Falls die Eingabe in q_2 zu Ende ist, wird die Richtung geändert, d.h. wir wandern auf dem Band rückwarts. In q_4 gibt es nur ein einziges a auf dem Band, falls nun kein weiteres a folgt, sind wir fertig und wechseln in den Endzustand q_5. Ansonsten gehen wir über q_6 an den Anfang des Wortes. Dann wiederholen wir den ganzen Vorgang.

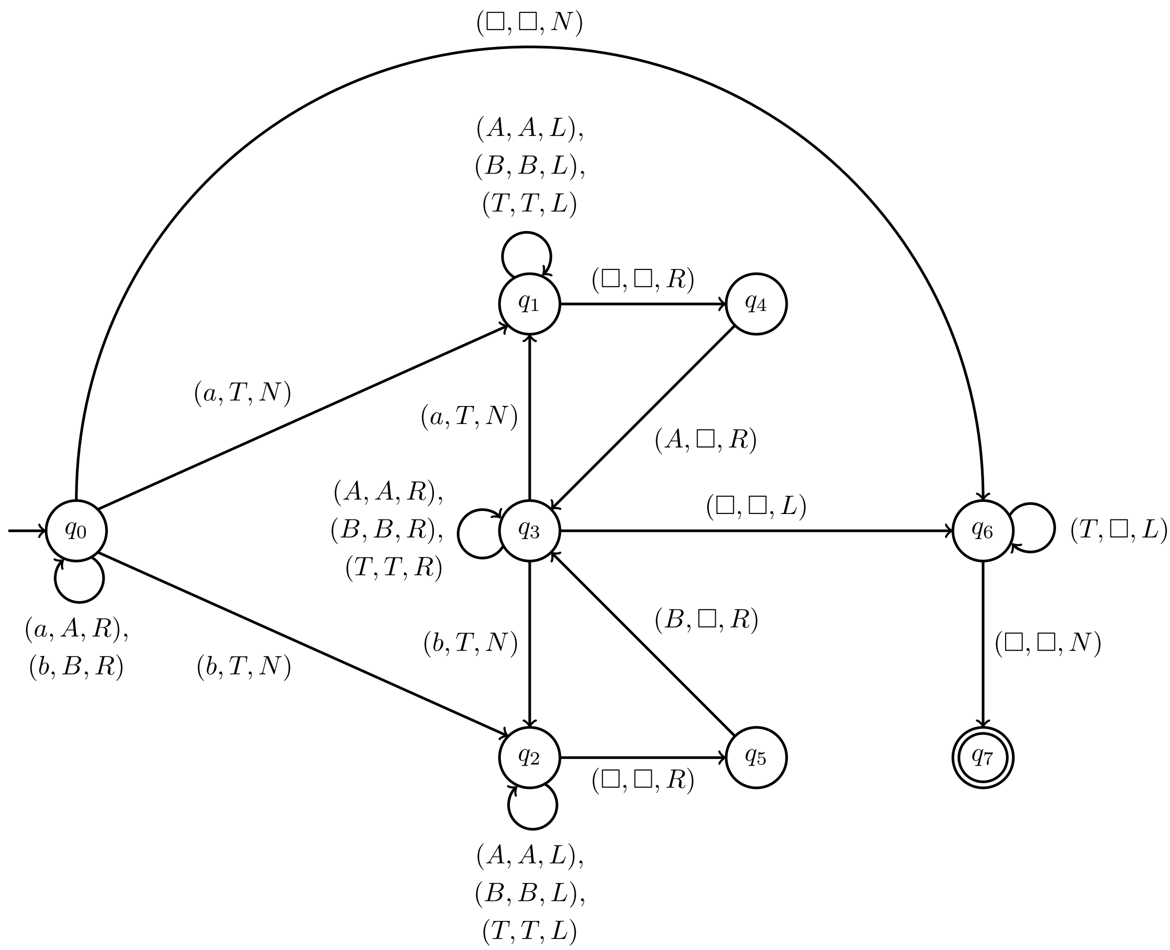
3. $aaaa \in \mathcal{L}'$?
$(q_0)aaaa \to a(q_1)aaa \to ab(q_2)aa \to aba(q_1)a \to abab(q_2)\Box \to aba(q_3)b \to ab(q_3)ab \to a(q_4)bab \to (q_4)abab \to (q_6)\Box abab \to (q_0)abab \to a(q1)bab \to ab(q_1)ab \to abb(q_2)b \to abbb(q_2)\Box \to abb(q_3)b \to ab(q_3)bb \to a(q_3)bbb \to (q_3)abbb \to (q_4)\Box abbb \to (q_5)\Box abbb$

   $aaa \in \mathcal{L}'$?
   $(q_0)aaa \to a(q_1)aa \to ab(q_2)a \to aba(q_1)\Box \to aba(q_F)\Box$

4. Behauptung: $\mathcal{L}'$ nicht kontextfrei
Beweis: Verwendung der Kontraposition des Pumping Lemmas
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Wähle $\omega \in \mathcal{L}'$ geeignet mit $|\omega| \geq n$, wähle also beispielsweise $\omega = a^{2^p}$ mit $p \in \mathbb{N}, 2^p > n$ (oder ganz speziell $w = a^{2^n}$). $\Rightarrow$
$\forall\, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \{a\}^*, \omega = \alpha\beta\gamma\delta\epsilon, |\beta\delta| \geq 1, |\beta\gamma\delta| \leq n :$
$\beta = a^i$ mit $i \in \mathbb{N}_0, i \leq n$, $\delta = a^j$ mit $j \in \mathbb{N}_0, j \leq n - i, j + i \geq 1$, $\gamma = a^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n - (i + j)$, $\alpha = a^l$ mit $l \in \mathbb{N}_0, l \leq 2^p - (i + j + k)$, $\epsilon = a^{2^p - (i+j+k+l)}$
Dann gilt $\alpha\beta^2\gamma\delta^2\epsilon = a^{2^p+i+j} \notin \mathcal{L}'$, denn wegen $1 \leq |\beta\delta| = i + j \leq n < 2^p$ gilt $2^p < 2^p + i + j < 2^{p+1}$. $\Rightarrow \mathcal{L}'$ nicht kontextfrei

Lösung zu Aufgabe 2

1. Das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ ist bereits vorgegeben, wir wählen $\Gamma = \{a, b, A, B, T, \square\}$, $\mathcal{Q} = \{q_0, \ldots, q_7\}$, den Startzustand q_0 und die Finalzustände $\mathcal{F} = \{q_7\}$. Die Zustandsübergangsrelation definieren wir durch den folgenden Zustandsübergangsgraphen:



Nehmen wir an, die Maschine liest ein Wort $w = vv$. Sie ersetzt zunächst alle Vorkommen von a durch A und b durch B bis zu einem Punkt, an dem sie rät, dass jetzt die Wiederholung des Wortes v beginnt. Sie hat quasi das erste Vorkommen von v "in Großbuchstaben" übersetzt. Dann löscht sie einfach nur noch sukzessiv Paare von Groß- und Kleinbuchstaben der beiden Teilworte. Wenn am Ende nur noch Platzhalterzeichen T auf dem Band waren, geht sie in den Finalzustand.

2. Die Turingmaschine $\mathcal{TM}$ akzeptiert die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{TM}) = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Durch die erste Schleife wird ein Wort $w = a^n b^n a^n$ auf dem Band in die Form $w' = B^n a^n$ überführt. Der Rest der Turingmaschine läuft einfach nur noch jeweils von Anfang bis Ende des aktuellen Bandwortes hin und her und überführt Worte der Form Bwa in w, bis das Band leer ist, dann wechselt $\mathcal{TM}$ in den Finalzustand.