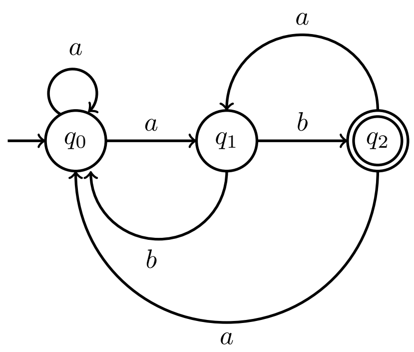
Tutorien-Übungsblatt 13

Aufgabe 1

1. Gegeben sei der nichtdeterministische Akzeptor $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{a, b\}, \mathcal{F} = \{q_2\}$ durch folgenden Graphen:



   Geben Sie einen äquivalenten deterministischen Akzeptor an (mit Zeichnung des Zustandsübergangsgraphen)!

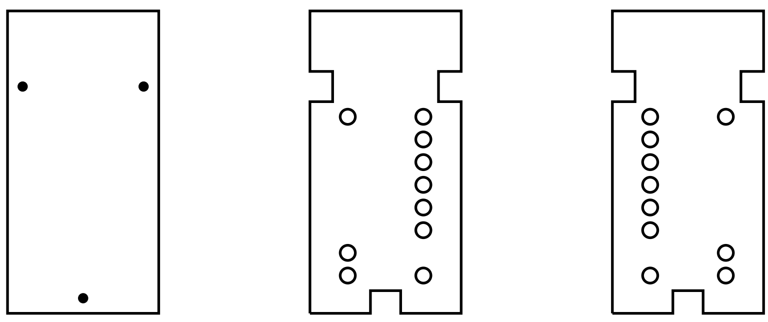
2. Gegeben sei die Grammatik $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit dem Terminalalphabet $\mathcal{T} = \{a, b, c, d\}$, dem Variablenalphabet $\mathcal{V} = \{S, A, B, C, X, Y\}$, dem Startsymbol $S \in \mathcal{V}$ und der folgenden Produktionenmenge:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \{S &\rightarrow AY \mid XY \\ X &\rightarrow AX \mid BX \mid AA \mid BA \\ Y &\rightarrow CX \mid CA \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c\} \end{aligned}$$

   Geben Sie an, ob sich das Wort $w = bacaa$ in der Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ befindet! Benutzen Sie dazu den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung!

Aufgabe 2

Gegeben sind eine Kästchen und eine Menge von Karten, wobei in dem Kästchen Stifte nach oben ragen und die Karten seitliche Aussparungen besitzen, dass sich die Karten auf genau zwei Arten in das Kästchen legen lassen. Dies wird durch das folgende Bild verdeutlicht:



Kästchen   Karte   Karte (umgedreht)

Jede Karte besitzt zwei zur ihrer Längsachse (Drehachse) symmetrisch liegende Spalten von jeweils einer gemeinsamen, festen, aber noch unbestimmten Anzahl n an Positionen. In den beiden Spalten kann an jeder beliebigen Position ein Loch eingestanzt sein oder nicht. Das Spiel besteht nun darin, alle Karten einer vorgegebenen Kartenmenge so in das Kästchen abzulegen, dass der gesamte Boden des Kästchens abgedeckt und damit nicht sichtbar ist, dass also jede Loch-Position in beiden Spalten durch mindestens eine Karte ohne Loch an der betreffenden Position verdeckt wird. Wir definieren damit nun folgendes Problem:

$$\text{PUZZLE} = \{(c_1, ..., c_k) \mid \begin{array}{l} \text{jedes } c_i \text{ repräsentiert eine Karte und} \\ \text{mit den Karten ist eine Überdeckung des Kästchenbodens möglich}\} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass PUZZLE **NP**-vollständig ist!

Aufgabe 3

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle $\mathcal{Q}$, die die Zeichen A, B, C und D mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten sendet:

$$\begin{aligned} p(A) = p_A &= \frac{1}{8} \\ p(B) = p_B &= \frac{1}{8} \\ p(C) = p_C &= \frac{1}{4} \\ p(D) = p_D &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Information jedes Zeichens!
2. Bestimmen Sie die Entropie der Quelle $\mathcal{Q}$!
3. Geben Sie eine Huffman-Codierung an, die die Zeichen der Quelle $\mathcal{Q}$ optimal codiert!
4. Ist der Huffman-Code eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort!
5. Gegeben sei folgende Codierung für die Quelle $\mathcal{Q}$:

   $$\begin{aligned} A &\rightarrow 111 \\ B &\rightarrow 011 \\ C &\rightarrow 01 \\ D &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

   Ist dies eine Huffman-Codierung? Begründen Sie Ihre Antwort kurz!

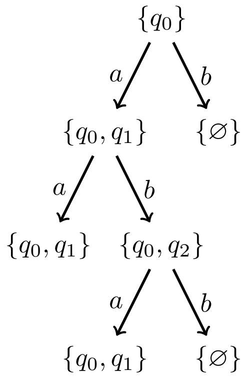
Aufgabe 4

Multiple-Choice-Test:

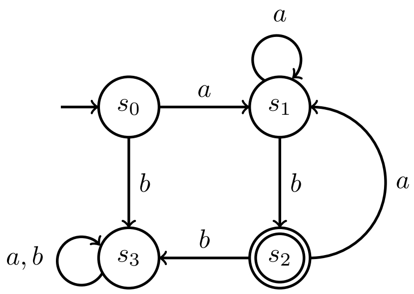
Aussage	Wahr	Falsch
Zu jeder CH-3-Sprache gibt es genau eine CH-3-Grammatik.		
Eine Sprache vom Chompsky-Typ-0 ist im Allgemeinen nicht rekursiv.		
Das Halteproblem ist für linear beschränkte Turingmaschinen entscheidbar.		
Die Entropie einer Quelle ohne Gedächtnis liegt immer zwischen 0 Bit und 1 Bit.		
Um zu zeigen, dass ein Problem Π in **NP** liegt, genügt es, Π auf ein **NP**-hartes Problem zu reduzieren.		
Eine Menge ist genau dann rekursiv, wenn sie und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind.		
Das Entscheidungsproblem für eine rekursiv aufzählbare Sprache liegt in **NP**.		
Wenn $s_1 = 01001$ und $s_2 = 11111$ von der gleichen Quelle ausgegeben wurden, enthält s_1 immer mehr Information als s_2.		
Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gilt, dann gilt $\mathbf{NP} = \mathbf{co\text{-}NP}$.		
Hat ein Kanal K Kapazität $C > 0$, dann gibt es eine Codierung $\mathcal{B}$, mit welcher fehlerfrei über K kommuniziert werden kann		
Ist ein Sprache $\mathcal{A}$ auf eine Sprache $\mathcal{B}$ many-one reduzierbar, so ist $\mathcal{A}$ genau dann entscheidbar, wenn $\mathcal{B}$ entscheidbar		
Hat ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ Kolmogorov-Komplexität $K(w) > n$, so ist w mindestens n Zeichen lang		

Lösung zu Aufgabe 1

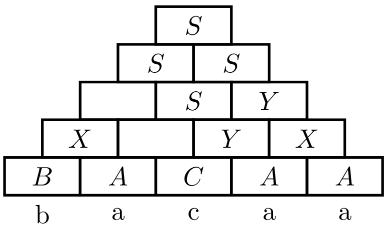
1. Ableitungsbaum:



Ein äquivalenter deterministischer Automat ist dann $\mathcal{M}' = (\mathcal{Q}', \Sigma, \delta', s_0, \mathcal{F}')$ mit $\mathcal{Q}' = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \mathcal{F}' = \{s_2\}$, $s_0 = \{q_0\}, s_1 = \{q_0, q_1\}, s_2 = \{q_0, q_2\}, s_3 = \varnothing$, wobei δ' durch den folgenden Graphen gegeben ist:



2. Liegt $w = bacaa$ in $\mathcal{L}(\mathcal{G})$?



Das Wort w befindet sich also in $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

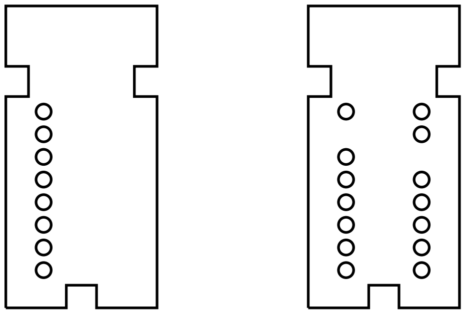
Lösung zu Aufgabe 2

Zunächst einmal macht man sich klar, dass PUZZLE in **NP** liegt. Das ist der Fall, denn man kann für n Karten in $O(n)$ raten, in welche Richtung die Karte eingelegt werden muss, und dann wiederum in $O(n)$ prüfen, dass der Boden des Kästchens wirklich überdeckt ist. Letzteres ist möglich, weil es nur eine feste, endliche Anzahl an möglichen Loch-Positionen gibt.

PUZZLE ist **NP**-hart, denn wir können 3-SAT auf PUZZLE reduzieren. Sei $\{X_1, ..., X_k\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen zu der Klauselmenge $\{K_1, ..., K_n\}$ als Instanz von 3-SAT. Konstruiere $k + 1$ Karten, bei denen die beiden Spalten genau n Loch-Positionen haben. Konstruiere erst eine Bodenkarte, bei der in einer Spalte alle Löcher und in der anderen Spalte keine Löcher ausgestanzt sind. Konstruiere dann für jede der k Variablen eine Karte, für die folgendes gilt:

1. Kommt die betroffene Variable X_i in Klausel K_j nicht vor, dann wird in beiden Spalten an Position j von oben ein Loch eingestanzt.
2. Kommt die betroffene Variable X_i in Klausel K_j nur ohne Negation vor, dann wird in der rechten Spalte an Position j von oben ein Loch eingestanzt.
3. Kommt die betroffene Variable X_i in Klausel K_j nur mit Negation vor, dann wird in der linken Spalte an Position j von oben ein Loch eingestanzt.
4. Kommt die betroffene Variable X_i in Klausel K_j mit und ohne Negation vor, dann wird in keiner Spalte an Position j von oben ein Loch eingestanzt.

Dies wird im folgenden Bild verdeutlicht:



Bodenkarte für 8 Klauseln   Beispiel-Karte

Da die Reihenfolge der Karten für die Überdeckung keine Rolle spielt, wird zuerst die Bodenkarte eingelegt. Wird die Bodenkarte mit der gelochten Spalte auf der linken Seite eingelegt, so bedeutet das Einlegen einer Karte in Originalrichtung dann das Belegen der entsprechenden Variablen X_i mit TRUE, das Einlegen einer Karte in umgekehrter Richtung bedeutet das Belegen der entsprechenden Variablen X_i mit FALSE. Wird die Bodenkarte mit der gelochten Spalte auf der rechten Seite eingelegt, so ist dies genau umgekehrt.

Daraus ergibt sich nun, dass eine Lösung für das so konstruierte Spiel damit über die Kartenausrichtung eine erfüllende Variablenbelegung für die ursprüngliche Klauselmenge liefert. Umgekehrt kann eine erfüllende Klauselbelegung aber auch verwendet werden, um eine Kartenausrichtung aller Karten zu bestimmen, die eine Lösung für das konstuierte Spiel darstellt.

Lösung zu Aufgabe 3

1. $I(A) = I(B) = -\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = 3$ bit
   $I(C) = -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ bit
   $I(D) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ bit
2. $H(Q) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2 8 + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = \frac{6}{8} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$
3. Huffman-Codierung:

Zeichen	Codewort
A	000
B	001
C	01
D	1

   Alternative Lösung:

Zeichen	Codewort
A	111
B	110
C	10
D	0

4. Nein, der Huffman-Code ist nicht eindeutig bestimmt. Man erhält z.B. weitere korrekte Huffman-Codierungen, wenn man jeweils 0 und 1 oder auch die Codewörter der Zeichen A und B tauscht.
5. Nein, die gegebene Codierung ist nicht präfixfrei und kann deshalb keine Huffman-Codierung sein.

Lösung zu Aufgabe 4

Auflösung des Multiple-Choice-Test:

Aussage	Wahr	Falsch
Zu jeder CH-3-Sprache gibt es genau eine CH-3-Grammatik.		X
Eine Sprache vom Chompsky-Typ-0 ist im Allgemeinen nicht rekursiv.	X	
Das Halteproblem ist für linear beschränkte Turingmaschinen entscheidbar.	X	
Die Entropie einer Quelle ohne Gedächtnis liegt immer zwischen 0 Bit und 1 Bit.		X
Um zu zeigen, dass ein Problem Π in **NP** liegt, genügt es, Π auf ein **NP**-hartes Problem zu reduzieren.		X
Eine Menge ist genau dann rekursiv, wenn sie und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind.	X	
Das Entscheidungsproblem für eine rekursiv aufzählbare Sprache liegt in **NP**.		X
Wenn $s_1 = 01001$ und $s_2 = 11111$ von der gleichen Quelle ausgegeben wurden, enthält s_1 immer mehr Information als s_2.		X
Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gilt, dann gilt $\mathbf{NP} = \mathbf{co\text{-}NP}$.	X	
Hat ein Kanal K Kapazität $C > 0$, dann gibt es eine Codierung $\mathcal{B}$, mit welcher fehlerfrei über K kommuniziert werden kann		X
Ist ein Sprache $\mathcal{A}$ auf eine Sprache $\mathcal{B}$ many-one reduzierbar, so ist $\mathcal{A}$ genau dann entscheidbar, wenn $\mathcal{B}$ entscheidbar		X
Hat ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ Kolmogorov-Komplexität $K(w) > n$, so ist w mindestens n Zeichen lang	X	