Tutorien-Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Gegeben sei ein binärer Kanal mit Sender X und Empfänger Y, genannt Z-Kanal, durch die folgende Matrix:
$Q = \begin{pmatrix} P(Y=0|X=0) & P(Y=0|X=1) \\ P(Y=1|X=0) & P(Y=1|X=1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$
Bestimmen Sie die Kanalkapazität!
Hinweis: Sie können dabei folgendes verwenden:

$$\frac{\log_b x}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{C}$ ein binärer Code, der durch die folgende Generatormatrix gegeben ist:
$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Dekodieren Sie die folgenden empfangenen Wörter!

1. $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Gegeben sei der $[7,4]$-Hamming-Code $\mathcal{C}_H$ mit der Erzeugermatrix
$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
und der Prüfmatrix
$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
Dekodieren Sie die folgenden empfangenen Wörter!

1. $w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 1

Die Kanalkapazität wird berechnet durch: $C = \max_X I(X;Y) = \max_{p(x)} I(X;Y)$

Weil es sich um einen binären Kanal handelt, gilt $P(X=0) = p$ und $P(X=1) = 1-p$ für eine feste Wahrscheinlichkeit $p \in \mathbb{R}, 0 \le p \le 1$ bezüglich einer entsprechenden Quelle X.

Dann gilt:
1. $P(Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0|X=0) + P(X=1) \cdot P(Y=0|X=1) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot (1+p)$

2. $P(Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1|X=0) + P(X=1) \cdot P(Y=1|X=1) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0.5 = 0.5 \cdot (1-p)$

3. $H(Y) = -(P(Y=0) \cdot \log_2 P(Y=0) + P(Y=1) \cdot \log_2 P(Y=1)) =$
$(-0.5) \cdot (1+p) \cdot \log_2(0.5 \cdot (1+p)) + (-0.5) \cdot (1-p) \cdot \log_2(0.5 \cdot (1-p))$

4. $H(Y|X=0) = -(P(Y=0|X=0) \cdot \log_2 P(Y=0|X=0) + P(Y=1|X=0) \cdot \log_2 P(Y=1|X=0)) =$
$-(1 \cdot \log_2 1 + 0 \cdot \log_2 0) = 0$

5. $H(Y|X=1) = -(P(Y=0|X=1) \cdot \log_2 P(Y=0|X=1) + P(Y=1|X=1) \cdot \log_2 P(Y=1|X=1)) =$
$-(0.5 \cdot \log_2 0.5 + 0.5 \cdot \log_2 0.5) = 1$

6. $H(Y|X) = P(X=0) \cdot H(Y|X=0) + P(X=1) \cdot H(Y|X=1) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 1 = 1-p$

7. $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = (-0.5) \cdot (1+p) \cdot \log_2(0.5 \cdot (1+p)) + (-0.5) \cdot (1-p) \cdot \log_2(0.5 \cdot (1-p)) - 1 + p$

Damit gilt nun $C = \max_p I(X;Y)$ und wir können über die Ableitung von $I(X;Y)$ nach p den Wert für p finden, für den $I(X;Y)$ maximal wird.

$I'(X;Y) = \frac{dI(X;Y)}{dp} =$

$(-0.5) \cdot \log_2(0.5 \cdot (1+p)) + (-0.5) \cdot (1+p) \cdot \frac{1}{0.5 \cdot (1+p) \cdot \ln 2} \cdot 0.5 +$

$0.5 \cdot \log_2(0.5 \cdot (1-p)) + (-0.5) \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{0.5 \cdot (1-p) \cdot \ln 2} \cdot (-0.5) + 1 =$

$0.5 \cdot (\log_2(0.5 \cdot (1-p)) - \log_2(0.5 \cdot (1+p))) + (-0.5) \cdot (\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}) + 1 =$

$0.5 \cdot \log_2(\frac{1-p}{1+p}) + 1$

$I'(X;Y) = 0 \Rightarrow 0.5 \cdot \log_2(\frac{1-p}{1+p}) + 1 = 0 \Rightarrow \log_2(\frac{1-p}{1+p}) = -2 \Rightarrow \frac{1-p}{1+p} = 0.25 \Rightarrow 1-p = 0.25 + 0.25 \cdot p \Rightarrow p = 0.6$

Durch Einsetzen von $p = 0.6$ in $I(X;Y)$ ergibt sich dann:
$C = (-0.8) \cdot \log_2 0.8 + (-0.2) \cdot \log_2 0.2 - 0.4 \approx 0.322$ bit

Lösung zu Aufgabe 2

Aufgrund der Tatsache, dass es sich um einen systematischen Code handelt, wie man an der Teilmatrix I_4 der Generatormatrix G erkennen kann, kann man die drei Prüfgleichungen direkt aus G ablesen. Sie lauten für ein Codewort $c \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^7$:

1. $c_1 + c_2 + c_5 = s_1$
2. $c_3 + c_4 + c_6 = s_2$
3. $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7 = s_3$

Daraus kann nun die Kontrollmatrix bilden:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun kann man für ein empfangenes Wort w über die Gleichung $Hw^T = s^T$ das Syndrom $s = (s_1\ s_2\ s_3)$ bestimmen. Gilt $s = (0\ 0\ 0)$, so geht man von einer korrekten Übertragung aus. Gilt $s \neq (0\ 0\ 0)$, so geht man zunächst von einem 1-Bit-Fehler aus und vergleicht s^T mit den Spalten der Kontrollmatrix. Bei einer eindeutigen Übereinstimmung kann das fehlerhafte Bit korrigiert werden. Bei mehreren Übereinstimmungen ist dann eine Korrektur nicht mehr möglich. Bei keiner Übereinstimmung liegt dann ein Mehr-Bit-Fehler vor und man muss dann Spaltensummen für den Vergleich verwenden.

1. Das Syndrom lautet $(0\ 0\ 0)$, das Codewort wurde also korrekt übertragen und die Originalnachricht lautet $(1\ 1\ 0\ 1)$.

2. Das Syndrom lautet $(0\ 0\ 1)$, das Codewort hat damit einen Fehler in Bit 7 und die Originalnachricht lautet $(0\ 1\ 1\ 0)$.

3. Das Syndrom lautet $(1\ 0\ 1)$, das Codewort hat damit einen Fehler in Bit 1 oder in Bit 2. Bei einem Fehler in Bit 1 lautet die Originalnachricht $(1\ 1\ 1\ 1)$, bei einem Fehler in Bit 2 lautet sie $(0\ 0\ 1\ 1)$.

Lösung zu Aufgabe 3

1. Das Syndrom lautet (0 0 0), das Codewort wurde also korrekt übertragen und die Originalnachricht lautet (0 1 1 1).
2. Das Syndrom lautet (1 1 1), das Codewort hat damit einen Fehler in Bit 7 und die Originalnachricht lautet (0 1 1 0).
3. Das Syndrom lautet (0 0 0), das Codewort wurde also korrekt übertragen und die Originalnachricht lautet (1 0 0 0).
4. Das Syndrom lautet (0 0 1), das Codewort hat damit einen Fehler in Bit 1 und die Originalnachricht lautet (1 1 1 1).