Tutorien-Übungsblatt 11

Aufgabe 1

1. Wie groß sind der Informationsgehalt und die Entropie, wenn eine Quelle mit dem Alphabet $\{0, 1\}$ nur aus dem Zeichen 0 bestehende Folgen sendet?

2. An einer Quelle mit n Zeichen tritt jedes Zeichen gleichverteilt auf. Wie groß sind der Informationsgehalt und die Entropie eines einzelnen Zeichens?

3. Berechnen Sie die Entropie des Wurfes eines idealen Würfels mit 8 Seiten, dessen Wahrscheinlichkeit für jede Seite $p = \frac{1}{8}$ ist!

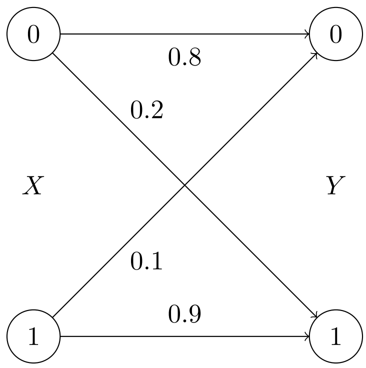
4. Was ist der Unterschied zwischen den beiden Folgen, die aus verschiedenen gedächtnislosen Quellen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit für 0 und 1 gesendet werden, wenn man sie unter dem Aspekt Entropie und Ordnung betrachtet?

   (a) ...10101010101010101010...

   (b) ...01101100110111000010...

Aufgabe 2

Studieren Sie den Fall eines asymmetrischen binären Kanals mit Quelle X und Empfänger Y. Die Übertragungswahrscheinlichkeiten $P(Y|X)$ seien durch das folgende Diagramm gegeben:



1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bitkette “1100” als “1001” übertragen wird?

2. Wenn die Entropie der Quelle $H(X) = 1$ bit ist, wie groß ist dann $H(Y)$?

3. Wie groß muss $H(X)$ sein, damit $H(Y) = 1$ bit gilt?

4. Wie groß ist die Verbundentropie $H(X, Y)$ des Übertragungssystems? Gehen Sie ab dieser Teilaufgabe von der Situation der 2. Teilaufgabe aus!

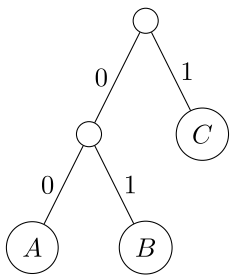
5. Wie groß ist die sog. Irrelevanz $H(Y|X)$? Und wie groß ist die sog. Äquivokation $H(X|Y)$?

6. Wie groß ist schließlich die Transinformation $I(X; Y)$?

Aufgabe 3

Gegeben sei eine Quelle mit Alphabet $\{A, B, C, D\}$ und mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:
$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{8}, P(D) = \frac{1}{8}$

1. Berechnen Sie die Entropie der Quelle!
2. Erstellen Sie eine entsprechende Huffman-Codierung!
3. Was ist die mittlere Codewortlänge? Gibt es einen Zusammenhang zur Entropie?
4. Gegeben sei der folgende Huffman-Baum:



Dekodieren Sie 011011101100101011! Ist der Huffman-Code geeignet?

Aufgabe 4

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle Q, die mit Wahrscheinlichkeit $p_0 = \frac{1}{4}$ eine 0 und mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = \frac{3}{4}$ eine 1 sendet. Gegeben sei zudem ein Empfänger R, der die Zeichen von Q zu empfangen versucht. Dieser Empfänger empfängt eine 0 immer richtig. Sendet die Quelle Q jedoch eine 1, so empfängt R mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 0.

1. Berechnen Sie die Information $I(0)$ und $I(1)$ bezüglich der Quelle Q!
2. Berechnen Sie die Entropie der Quelle Q!
3. Die Quelle Q sendet die Zeichenfolge 0110. Wie hoch ist der Informationsgehalt dieser Zeichenfolge?
4. Berechnen Sie die Totalinformation $H(Q, R)$, die Fehlinformation $H(R|Q)$, die Äquivokation $H(Q|R)$ und die Transinformation $I(Q; R)$!

Lösung zu Aufgabe 1

1. Sei p die Wahrscheinlichkeitsfunktion, für die nach der Aufgabenstellung $p(X=0)=1$ und $p(X=1)=0$ gilt. Der Informationsgehalt $I(x)$ eines von der Quelle gesendeten Zeichens x ist $I(x)=-\log_2 p(X=x)$. Somit ist $I(0)=-\log_2 1=0$.
Die Entropie ist $H(X)=\sum\limits_{x\in\{0,1\}}(p(X=x)\cdot I(x))=1\cdot 0+0=0$.

2. Für alle n Zeichen der Quelle gilt $p(X=x)=\frac{1}{n}$. Somit gilt $I(x)=-\log_2 p(X=x)=-\log_2\frac{1}{n}=\log_2 n$ für jedes Zeichen x.
Die Entropie eines Zeichens ist dann $H(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}\cdot\log_2 n)=\log_2 n$.

3. Für jede der 8 Würfelseiten gilt $p(X=x)=\frac{1}{8}$ und somit ist die Entropie eines einzelnen Würfelwurfs $H(X)=\log_2 8=3$.

4. Der Informationsgehalt <u>eines</u> Zeichens ist für die gegebenen Folgen gleich, da die Zeichen 0 und 1 von beiden Quellen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gesendet werden. Zu erkennen ist, dass die Zeichen der ersten Quelle durch eine sich wiederholende Struktur geordnet sind, weshalb die erste Zeichenkette im Mittel weit weniger Information als in der zweiten Zeichenkette enthält und damit eine niedrigere Entropie hat.
Wenn die Folge aus voneinander abhängigen Folgengliedern besteht, dann sind die nächsten Folgenglieder leichter vorherzusagen und damit ist ihr mittlerer Informationsgehalt geringer. Man sieht dies an der ersten Zeichenkette besonders einfach, wenn man immer Paare der Zeichen 0 und 1 jeweils als ein Zeichen eines neuen, vierelementigen Alphabets betrachtet. Dann sendet die erste Quelle immer das gleiche Zeichen 10 und der Informationsgehalt dieses Zeichens und die Entropie sind 0.

Lösung zu Aufgabe 2

1. Da der Informationskanal kein Gedächtnis hat, geschieht die Übertragung der einzelnen Zeichen unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren sich also:
$p(1001|1100)=p(1|1)\cdot p(0|1)\cdot p(0|0)\cdot p(1|0)=0.9\cdot 0.1\cdot 0.8\cdot 0.2=0.0144$

2. Die Entropie der Quelle erreicht wegen des zweielementigen Alphabets genau dann ihr Maximum von $H(X)=1$ bit, wenn die beiden Zeichen 0 und 1 gleich oft auftreten, also wenn $P(X=0)=P(X=1)=0.5$ gilt.
Dann gilt für den Empfänger Y $P(Y=y)=\sum\limits_{x\in\{0,1\}}(P(X=x)\cdot P(Y=y|X=x))$ und wir erhalten wir $P(Y=0)=0.5\cdot 0.8+0,5\cdot 0.1=0.45$ und $P(Y=1)=0.5\cdot 0.9+0.5\cdot 0.9=0.55$.
Die Entropie auf der Empfängerseite ist also $H(Y)=-(0.45\cdot\log_2 0.45+0.55\cdot\log_2 0.55)$ bit $\approx 0,9928$ bit

3. Es gilt wieder $H(Y)=1$ bit $\Leftrightarrow P(Y=0)=P(Y=1)=0.5$.
Daraus ergeben sich nun die beiden folgenden linearen Gleichungen:
$P(Y=0)=0.5=0.8\cdot P(X=0)+0.1\cdot P(X=1)$
$P(Y=1)=0.5=0.2\cdot P(X=0)+0.9\cdot P(X=1)$
Man erhält dann $P(X=0)=\frac{4}{7}\approx 0.571$ und $P(X=1)=\frac{3}{7}\approx 0.429$.
Damit ist die Entropie der Quelle $H(X)\approx 0,9852$ bit.

4. Die Verbundentropie des Kanals berechnet sich durch
$H(X,Y)=-\sum\limits_{x\in\{0,1\}}\sum\limits_{y\in\{0,1\}}(P(X=x,Y=y)\cdot\log_2 P(X=x,Y=y))\approx 1,5955$ bit.

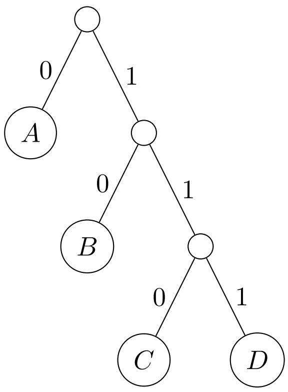
5. Aus der Verbundentropie lassen sich leicht die bedingten Entropien, nämlich die Irrelevanz $H(Y|X)$ und die Äquivokation $H(X|Y)$, berechnen:
$H(Y|X)=H(X,Y)-H(X)\approx 1,5955$ bit -1 bit $\approx 0,5955$ bit
$H(X|Y)=H(X,Y)-H(Y)\approx 1,5955$ bit $-0,9928$ bit $\approx 0,6027$ bit

6. Die Transinformation $I(X;Y)$ bezeichnet denjenigen Anteil der Quellenentropie $H(X)$, der bei der Übertragung beim Empfänger Y ankommt, also genau denjenigen Anteil der empfangenen Information $H(Y)$, der überhaupt von der Quelle X stammt. Sie lässt sich daher berechnen durch:
$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)\approx 0,3973$ bit

Lösung zu Aufgabe 3

1. $H(X)=-(0.5\cdot\log_2 0.5+0.25\cdot\log_2 0.25+2\cdot 0.125\cdot\log_2 0.125)=0.5+0.5+0.75=1.75$

2. Hinweis: Der Code ist nicht eindeutig!



3. Die mittlere Codewortlänge ergibt sich aus der Aufsummierung der Produkte aus Auftrittswahrscheinlichkeit und Codewortlänge über allen Codewörtern. Also ist die mittlere Codewortlänge $0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 2 * 0.125 \cdot 3 = 1.75$. Die mittlere Codewortlänge ist immer größer oder gleich der Entropie. Hier erreicht sie sogar den minimalen Wert, weil die Auftrittswahrscheinlichkeiten Potenzen von 2 sind.

4. Dekodiert ergibt sich das Wort BCBCCBCACBBC. Der Huffman-Code eignet sich gut wegen der Beachtung der Auftrittswahrscheinlichkeiten.

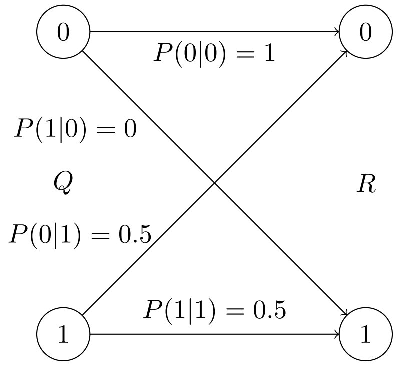
Lösung zu Aufgabe 4

1. Information des Zeichens 0: $I(0) = -\log_2 p_0 = -\log_2 0.25 = 2$ bit
   Information des Zeichens 1: $I(1) = -\log_2 p_1 = -\log_2 0.75 \approx 0.415$ bit

2. Entropie der Quelle Q: $H(Q) = -(p_0 \cdot \log_2 p_0 + p_1 \cdot \log_2 p_1) = 0.25 \cdot 2 + 0.75 \cdot \log_2 \frac{4}{3} \approx 0.81$ bit

3. Informationsgehalt der Zeichenfolge 0110: $I(0110) = 2 \cdot I(0) + 2 \cdot I(1) \approx 4.83$ bit

4. Wir fassen die bedingten Wahrscheinlichkeiten in folgender Skizze zusammen:



   Weiterhin benötigen wir folgende Wahrscheinlichkeiten:
   $P(0,0) = p_0 \cdot P(0|0) = 0.25$
   $P(0,1) = p_0 \cdot P(1|0) = 0$
   $P(1,0) = p_1 \cdot P(0|1) = 0.375$
   $P(1,1) = p_1 \cdot P(1|1) = 0.375$
   Totalinformation: $H(Q,R) = -\sum_{x,y \in \{0,1\}} (P(x,y) \cdot \log_2 P(x,y)) \approx 1,56$ bit
   Fehlinformation: $H(R|Q) = -\sum_{x,y \in \{0,1\}} (P(x,y) \cdot \log_2 P(y|x)) = -(2 \cdot 0.375 \cdot \log_2 0.5) = 0,75$ bit
   Alternativ: $H(R|Q) = H(Q,R) - H(Q) \approx 0,75$ bit Zur Berechnung der Äquivokation berechnen wir erst die Empfangswahrscheinlichkeiten der Zeichen 0 und 1 und die Entropie des Empfängers R.
   $p'_0 = p_0 \cdot P(0|0) + p_1 \cdot P(0|1) = 0.25 \cdot 1 + 0.75 \cdot 0.5 = 0.625$
   $p'_1 = p_0 \cdot P(1|0) + p_1 \cdot P(1|1) = 0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0.5 = 0.375$
   $H(R) = -(p'_0 \cdot \log_2 p'_0 + p'_1 \cdot \log_2 p'_1) \approx 0.95$ bit
   Äquivokation: $H(Q|R) = H(Q,R) - H(R) \approx 0.61$ bit
   Transinformation: $I(Q;R) = H(Q) - H(Q|R) \approx 0.20$ bit
   Alternativ: $I(Q;R) = H(R) - H(R|Q) \approx 0.20$ bit