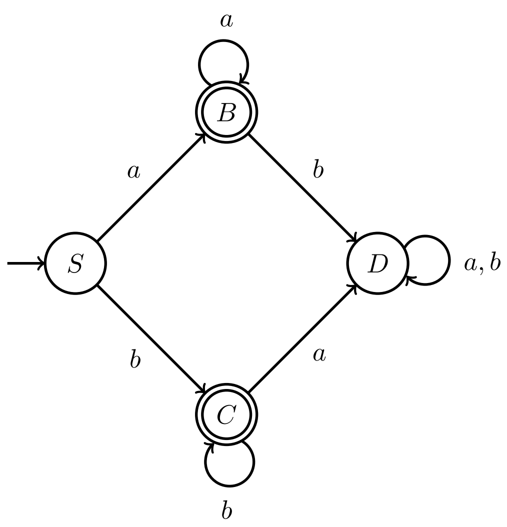
Tutorien-Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Gegeben sei der folgende endliche Automat:
$\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, S, \mathcal{F})$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $\mathcal{Q} = \{S, B, C, D\}$, $\mathcal{F} = \{B, C\}$ und δ gegeben durch:



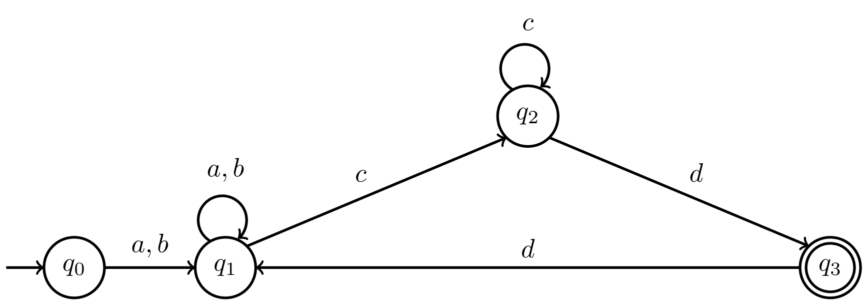
1. Geben Sie die von diesem Automaten akzeptierte Sprache in einem regulären Ausdruck an!
2. Um was für einen Automaten handelt es sich?
3. Konstruieren Sie einen äquivalenten endlichen Automaten, der nur einen einzigen Endzustand besitzt!
4. Geben Sie eine linkslineare Grammatik für die Sprache dieses Automaten an, die keine überflüssigen Nichtterminale und Regeln enthält!

Aufgabe 2

1. Formulieren Sie einen regulären Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der jedes beliebige Wort erfasst, wobei die vorletzte Ziffer 0 sein soll!
2. Geben Sie für diese Sprache den möglichst größten Chomsky-Typ und eine zugehörige Grammatik an!
3. Geben Sie einen dazugehörigen Automaten an, der diese Sprache akzeptiert!

Aufgabe 3

Gegeben sei der folgende endliche Akzeptor $\mathcal{M}$ mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:



1. Welche Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ wird von dem Akzeptor $\mathcal{M}$ akzeptiert?
2. Konstruieren Sie aus $\mathcal{M}$ eine rechtslineare Grammatik, die $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ erzeugt!

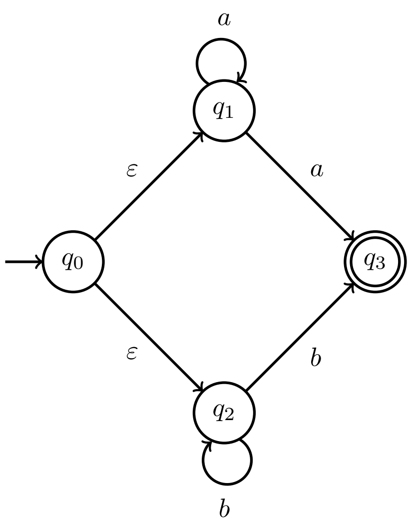
Aufgabe 4

Die Sprache $\mathcal{L}$ sei durch den regulären Ausdruck $(aa^*b^*)^*cc^*$ definiert.

1. Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $\mathcal{G}$ an, die $\mathcal{L}$ erzeugt!
2. Konstruieren Sie aus $\mathcal{G}$ einen endlichen Akzeptor, der $\mathcal{L}$ akzeptiert!

Lösung zu Aufgabe 1

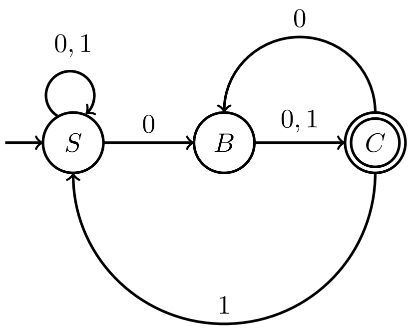
1. $(a \cdot a^*) + (b \cdot b^*) = (a^+) + (b^+)$
2. Es handelt sich um einen (endlichen) Akzeptor.
3. So könnte ein gesuchter nichtdeterministischer endlicher Automat aussehen:



4. Grammatik: $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit
$\mathcal{V} := \{S, B, C\}$, $\mathcal{T} := \{a, b\}$, $\mathcal{P} := \{S \to Ca \mid Bb \mid a \mid b, B \to Bb \mid b, C \to Ca \mid a\}$

Lösung zu Aufgabe 2

1. $(0 + 1)^* \cdot 0 \cdot (0 + 1)$
2. Die Sprache ist vom Chomsky-Typ 3!
Grammatik: $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit
$\mathcal{V} := \{S, B\}$, $\mathcal{T} := \{0, 1\}$, $\mathcal{P} := \{S \to 0S \mid 1S \mid 0B, B \to 0 \mid 1\}$
3. So könnte der gesuchte endliche Automat aussehen:
$\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, S, \mathcal{F})$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $\mathcal{Q} = \{S, B, C\}$, $\mathcal{F} = \{C\}$ und δ gegeben durch:



Lösung zu Aufgabe 3

1. Der Akzeptor $\mathcal{M}$ akzeptiert die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{a,b\}^+\{c\}^+\{d\}(\{d\}\{a,b\}^*\{c\}^+\{d\})^*$.

   Da sich die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ leichter und leserlicher mit einem regulären Ausdruck beschreiben lässt, folgt hier noch zusätzlich der reguläre Ausdruck R, der $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ beschreibt:
   $R = (a+b)(a+b)^*cc^*d(d(a+b)^*cc^*d)^*$

2. Aus dem endlichen Akzeptor $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$ kann direkt eine rechtslineare Grammatik konstruiert werden, die $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ erzeugt:
   Schritt 1: Definiere das Terminalalphabet der Grammatik als das Eingabealphabet des Automaten, also $\mathcal{T} := \Sigma = \{a,b,c,d\}$.
   Schritt 2: Füge für jeden Zustand q des Akzeptors dem Variablenalphabet der Grammatik eine Variable hinzu: $\mathcal{V} := \{S,A,B,C\}$, wobei das Startzeichen S dem Startzustand q_0, A dem Zustand q_1, B dem Zustand q_2 und C dem Zustand q_3 entspricht.
   Schritt 3: Übersetze die Transitionen des Akzeptors in Produktionen der Grammatik. Füge dazu für jede Transition $\delta(q_l, x) = q_m$ des Akzeptors mit $q_l, q_m \in Q, x \in \Sigma$ eine Produktion $V_1 \to xV_2$ hinzu, wobei V_1 und V_2 die Variablen sind, die den Zuständen q_l und q_m entsprechen. Füge außerdem für jeden Endzustand des Akzeptors eine Produktion $V \to \lambda$ für die dem Endzustand entsprechenden Variable $V \in \mathcal{V}$ hinzu. Die Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ wird damit also erzeugt von der Grammatik $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit dem Terminalalphabet $\mathcal{T} = \{a,b,c,d\}$, dem Variablenalphabet $\mathcal{V} = \{S,A,B,C\}$, dem Startzeichen S und der Produktionenmenge
   $\mathcal{P} = \{S \to aA \mid bA$
   $A \to aA \mid bA \mid cB$
   $B \to cB \mid dC$
   $C \to dA \mid \lambda\}$.

Lösung zu Aufgabe 4

1. $\mathcal{L}$ wird von folgender Grammatik $\mathcal{G} = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit Terminalalphabet $\mathcal{T} = \{a,b,c\}$ und Variablenalphabet $\mathcal{V} = \{S,A,B\}$ und folgenden Produktionen erzeugt:
   $S \to aA \mid cB$
   $A \to aA \mid bA \mid cB$
   $B \to cB \mid \lambda$

2. Aus der rechtslinearen Grammatik $\mathcal{G}$ lässt sich folgendermaßen ein endlicher Akzeptor $\mathcal{M}$ konstruieren, der $\mathcal{L}$ akzeptiert, wobei das Eingabealphabet des Akzeptors das Terminalalphabet der Grammatik ist:
   Schritt 1: Für jede Variable $V \in \mathcal{V}$ bekommt der Akzeptor einen Zustand q_V, dabei entspricht der Startzustand q_S dem Startzeichen S.
   Schritt 2: Für jede Produktion der Form $V_1 \to xV_2$ mit $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathcal{T}$ bekommt der Akzeptor eine Transition von q_{V_1} nach q_{V_2} mit Eingabezeichen x.
   Schritt 3: Enthält die Grammatik für eine Variable $V \in \mathcal{V}$ eine Produktion $V \to \lambda$, so wird der entsprechende Zustand q_V zum Endzustand.
   Damit erhalten wir folgenden Automaten: